1a $p(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2 \cdot (3x - 7) = 3x^3 - 7x^2 \Rightarrow p'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x = 9x^2 - 14x.$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ en $g(x) = 3x - 7 \Rightarrow g'(x) = 3.$

1b $p'(x) = 9x^2 - 14x$ en $f'(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot 3 = 6x$. Deze zijn niet gelijk, dus $p'(x) \neq f'(x) \cdot g'(x)$.

1c $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot (3x - 7) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 - 14x + 3x^2 = 9x^2 - 14x.$
Dus hier geldt: $p(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

2a $f(x) = (2 - 3x^2) \cdot (2 + 7x) \Rightarrow f'(x) = -6x \cdot (2 + 7x) + (2 - 3x^2) \cdot 7.$

2b $g(x) = (2x - 5)^2 = (2x - 5) \cdot (2x - 5) \Rightarrow g'(x) = 2 \cdot (2x - 5) + (2x - 5) \cdot 2.$

2c $h(x) = (x^2 - 3x) \cdot (x^3 + x^2 + x) \Rightarrow h'(x) = (2x - 3) \cdot (x^3 + x^2 + x) + (x^2 - 3x) \cdot (3x^2 + 2x + 1).$

2d $j(x) = (3x^2 - 4)^2 = (3x^2 - 4) \cdot (3x^2 - 4) \Rightarrow j'(x) = 6x \cdot (3x^2 - 4) + (3x^2 - 4) \cdot 6x.$

3a $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = j(x) \cdot h(x) \Rightarrow p'(x) = j'(x) \cdot h(x) + j(x) \cdot h'(x)$ ❶.
$j(x) = f(x) \cdot g(x)$ ❷ $\Rightarrow j'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ ❸. Nu ❷ en ❸ invullen in ❶ geeft:
$p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \Rightarrow p'(x) = \left(f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\right) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$
$= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$
(de eerste factor differentiëren en de andere factoren onaangeroerd laten + ... totdat alle factoren aan de beurt zijn geweest)

3b $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot j(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot j(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) \cdot j(x)$
$+ f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \cdot j(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot j'(x).$

4 $q(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ ❶ (een product kunnen we al wel differentiëren $\Rightarrow$ kruiselings vermenigvuldigen)
$q(x) \cdot n(x) = t(x)$
(differentieer het linker- en rechterlid)
$q'(x) \cdot n(x) + q(x) \cdot n'(x) = t'(x)$
$q'(x) \cdot n(x) = t'(x) - q(x) \cdot n'(x)$
$q'(x) = \frac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ ❷ (hiernaast verder)

Nu ❶ invullen in ❷ geeft: $q'(x) = \frac{t'(x) - \frac{t(x)}{n(x)} \cdot n'(x)}{n(x)}$
Teller en noemer vermenigvuldigen met $n(x)$ geeft:
$q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}.$

5a $f(x) = \frac{x - 2}{x + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x + 5) \cdot 1 - (x - 2) \cdot 1}{(x + 5)^2} = \frac{x + 5 - x + 2}{(x + 5)^2} = \frac{7}{(x + 5)^2}.$

5b $g(x) = \frac{3x + 2}{-x + 6} \Rightarrow g'(x) = \frac{(-x + 6) \cdot 3 - (3x + 2) \cdot -1}{(-x + 6)^2} = \frac{-3x + 18 + 3x + 2}{(-x + 6)^2} = \frac{20}{(-x + 6)^2}.$

5c $h(x) = \frac{2}{2x - 1} \Rightarrow h'(x) = \frac{(2x - 1) \cdot 0 - 2 \cdot 2}{(2x - 1)^2} = \frac{-4}{(2x - 1)^2}.$

5d $j(x) = \frac{6x - 9}{3} = 2x - 3 \Rightarrow j'(x) = 2.$

6a $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x^2 + 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{6x^4 + 3x^2 - 4x^4}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 3x^2}{(2x^2 + 1)^2}.$

6b $g(x) = \frac{x - 2}{3 - x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{(3 - x^2) \cdot 1 - (x - 2) \cdot -2x}{(3 - x^2)^2} = \frac{3 - x^2 + 2x^2 - 4x}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(3 - x^2)^2}.$

6c $h(x) = \frac{3 - x^2}{x - 2} + x^3 \Rightarrow h'(x) = \frac{(x - 2) \cdot -2x - (3 - x^2) \cdot 1}{(x - 2)^2} + 3x^2 = \frac{-2x^2 + 4x - 3 + x^2}{(x - 2)^2} + 3x^2 = \frac{-x^2 + 4x - 3}{(x - 2)^2} + 3x^2.$

6d $j(x) = x - \frac{2}{x + 4} \Rightarrow j'(x) = 1 - \frac{(x + 4) \cdot 0 - 2 \cdot 1}{(x + 4)^2} = 1 - \frac{-2}{(x + 4)^2} = 1 + \frac{2}{(x + 4)^2}.$

7a Snijden met de x-as $(y = 0) \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5} = 0$ (teller $= 0$ en noemer $\neq 0$)
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \pm 2$ (voldoen)
Dus $A(-2, 0)$ en $B(2, 0)$.
$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x + 5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 5) \cdot 2x - (x^2 - 4) \cdot 2}{(2x + 5)^2} = \frac{4x^2 + 10x - 2x^2 + 8}{(2x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(2x + 5)^2}.$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f\,'(-2) = \frac{8-20+8}{1^2} = -4$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -4x + b \\ \text{door } A(-2,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -4 \cdot -2 + b$

$-8 = b$.

Dus k: $y = -4x - 8$.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = f\,'(2) = \frac{8+20+8}{9^2} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = \frac{4}{9}x + b \\ \text{door } B(2,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \frac{4}{9} \cdot 2 + b$

$-\frac{8}{9} = b$.

Dus l: $y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9}$.

7b $\left.\begin{array}{l} f(0) = -\frac{4}{5} \Rightarrow C(0,\ -\frac{4}{5}) \\ f\,'(0) = \frac{8}{5^2} = \frac{8}{25} \end{array}\right\} \Rightarrow m\text{: } y = \frac{8}{25}x - \frac{4}{5}$.

7c $f\,'(x) = \frac{2x^2+10x+8}{(2x+5)^2} = 0$ (teller = 0 en noemer ≠ 0)

$2x^2 + 10x + 8 = 0$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$(x+4) \cdot (x+1) = 0$

$x = -4$ of $x = -1$. (nu nog de y-coördinaten)

$f(-4) = \frac{16-4}{-8+5} = \frac{12}{-3} = -4$ en $f(-1) = \frac{1-4}{-2+5} = \frac{-3}{3} = -1$.

8 $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4} \Rightarrow f\,'(x) = \frac{(x^2-4)\cdot 2 - (2x-5)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2+10x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^2+10x-8}{(x^2-4)^2}$.

$f(0) = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \Rightarrow A(0,\ 1\frac{1}{4})$ en $f\,'(0) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \Rightarrow k\text{: } y = -\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}$.

$f(x) = \frac{2x-5}{x^2-4} = 0$ (teller = 0 en noemer ≠ 0) $\Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 2\frac{1}{2}$ (voldoet) $\Rightarrow B(2\frac{1}{2},\ 0)$.

$x = 2\frac{1}{2}$ invullen in k geeft: $y = -\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = -1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = 0 \Rightarrow B$ ligt op k.

9a $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$. $\frac{5}{x^4} = 5 \cdot \frac{1}{x^4} = 5 \cdot x^{-4}$. $\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot x^{-2}$.

9b $x^{-4} = \frac{1}{x^4}$. $3 \cdot x^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$. $\frac{1}{7} \cdot x^{-6} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{x^6} = \frac{1}{7x^6}$.

10a $\frac{x^3+5x^2}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} = x^2 + 5x$. $\frac{4x^2+7x}{x^3} = \frac{4x^2}{x^3} + \frac{7x}{x^3} = 4x^{-1} + 7x^{-2}$. $\frac{2x^5+5x^2}{3x^4} = \frac{2x^5}{3x^4} + \frac{5x^2}{3x^4} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}x^{-2}$.

10b $\frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{x} + \frac{2}{x^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{x+4}{2x^2}$. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{x^2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2} + \frac{3}{x^2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{x^3+6}{2x^2}$. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4x} = \frac{2x^2}{3} \cdot \frac{4x}{4x} - \frac{3}{4x} \cdot \frac{3}{3} = \frac{8x^3-9}{12x}$.

11a $[\frac{1}{x^2}]' = \frac{x^2 \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$.

11b $[x^{-2}]' = [\frac{1}{x^2}]' =$ (zie 11a) $\frac{-2}{x^3} = -2 \cdot \frac{1}{x^3} = -2 \cdot x^{-3}$.

11c $[x^{-5}]' = [\frac{1}{x^5}]' = \frac{x^5 \cdot 0 - 1 \cdot 5x^4}{(x^5)^2} = \frac{-5x^4}{x^{10}} = \frac{-5}{x^6} = -5 \cdot \frac{1}{x^6} = -5 \cdot x^{-6}$.

12a Dat lukte omdat de noemer steeds uit slechts één term bestaat.

12b De functies g en h zijn zonder quotiëntregel te differentiëren. (de noemers bestaan uit slechts één term)

13a $f(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6} \Rightarrow f\,'(x) = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$.

13b $g(x) = 5 - \frac{3}{x^2} = 5 - 3x^{-2} \Rightarrow g\,'(x) = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3}$.

13c $h(x) = ax^4 - \frac{b}{x^4} = ax^4 - bx^{-4} \Rightarrow h\,'(x) = 4ax^3 + 4bx^{-5} = 4ax^3 + \frac{4b}{x^5}$.

14a $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2} = \frac{2x}{3x^2} - \frac{1}{3x^2} = \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2} \Rightarrow f\,'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-3} = -\frac{2}{3x^2} \cdot \frac{x}{x} + \frac{2}{3x^3} = -\frac{2x}{3x^3} + \frac{2}{3x^3} = \frac{-2x+2}{3x^3}$.

14b $g(x) = \frac{3x^2}{2x-1} \Rightarrow g\,'(x) = \frac{(2x-1)\cdot 6x - 3x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{12x^2-6x-6x^2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2-6x}{(2x-1)^2}$.

14c $h(x) = \frac{3x^6-3}{x^3} = \frac{3x^6}{x^3} - \frac{3}{x^3} = 3x^3 - 3x^{-3} \Rightarrow h\,'(x) = 9x^2 + 9x^{-4} = \frac{9x^6}{x^4} + \frac{9}{x^4} = \frac{9x^6+9}{x^4}$.

15a $f(x) = \frac{x}{x^2-1} \Rightarrow f\,'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$.

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f\,'(2) = \frac{-4-1}{(4-1)^2} = \frac{-5}{9}$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = -\frac{5}{9}x + b \\ f(2) = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{door } A(2,\ \frac{2}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{5}{9} \cdot 2 + b$

$\frac{16}{9} = b \Rightarrow$ Dus k: $y = -\frac{5}{9}x + 1\frac{7}{9}$.

15b $g(x)=\frac{x^2-1}{x} \Rightarrow g'(x)=\frac{x\cdot 2x-(x^2-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2+1}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}.$

Stel l: $y=ax+b$ met $a=g'(2)=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}.$

$$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y=\frac{5}{4}x+b \\ g(2)=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{door } B(2,\ \frac{3}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{5}{4}\cdot 2+b$$

$-1=b.$ Dus l: $y=1\frac{1}{4}x-1.$

15c $g(x)=\frac{x^2-1}{x}=0$

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1 \Rightarrow C(-1,\ 0)$ en $D(1,\ 0)$.

Stel m: $y=ax+b$ met $a=g'(-1)=\frac{1+1}{1}=2.$

$$\left.\begin{array}{l} m\text{: } y=2x+b \\ \text{door } C(-1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2\cdot -1+b$$

$2=b.$ Dus m: $y=2x+2.$

Stel n: $y=ax+b$ met $a=g'(1)=\frac{1+1}{1}=2.$

$$\left.\begin{array}{l} n\text{: } y=2x+b \\ \text{door } D(1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2\cdot 1+b$$

$-2=b.$ Dus n: $y=2x-2.$

16a $\frac{x^2}{\sqrt{x}}=\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{1\frac{1}{2}}.$ $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}.$ $\frac{x^2\cdot\sqrt{x}}{x^4}=\frac{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^4}=\frac{x^{2\frac{1}{2}}}{x^4}=x^{-1\frac{1}{2}}.$

16b $x^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{x^1}=\sqrt[5]{x}.$ $x^{2\frac{1}{2}}=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^2\cdot\sqrt{x}.$ $x^{-1\frac{1}{3}}=\frac{1}{x^{1\frac{1}{3}}}=\frac{1}{x^1\cdot x^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x^1}}=\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}}.$

17a $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=x \Rightarrow [x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}]'=[x]'$

$[x^{\frac{1}{2}}]'\cdot x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\cdot[x^{\frac{1}{2}}]'=1$

$2x^{\frac{1}{2}}\cdot[x^{\frac{1}{2}}]'=1.$

17b $2x^{\frac{1}{2}}\cdot[x^{\frac{1}{2}}]'=1$

$[x^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$

18a $f(x)=x+\sqrt{x}=x+x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}=1+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$

18b $g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x}=x^1\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{1\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x)=1\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}=1\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{x}.$

18c $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x)=-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}.$

18d $j(x)=x^3\cdot\sqrt[5]{x^3}=x^3\cdot x^{\frac{3}{5}}=x^{3\frac{3}{5}} \Rightarrow j'(x)=3\frac{3}{5}x^{2\frac{3}{5}}=3\frac{3}{5}x^2\cdot x^{\frac{3}{5}}=3\frac{3}{5}x^2\cdot\sqrt[5]{x^3}.$

18e $k(x)=x^2\cdot\sqrt[4]{x}=x^2\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{2\frac{1}{4}} \Rightarrow k'(x)=2\frac{1}{4}x^{1\frac{1}{4}}=2\frac{1}{4}x^1\cdot x^{\frac{1}{4}}=2\frac{1}{4}x\cdot\sqrt[4]{x}.$

18f $l(x)=(x^2+1)\cdot(1+\sqrt{x})=(x^2+1)\cdot(1+x^{\frac{1}{2}})=x^2+x^{2\frac{1}{2}}+1+x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$l'(x)=2x+2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=2x+2\frac{1}{2}x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}=2x+2\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$

19a $f(x)=(x\sqrt{x}-3)^2=(x\sqrt{x}-3)\cdot(x\sqrt{x}-3)=x^3-6x\sqrt{x}+9=x^3-6x^{1\frac{1}{2}}+9 \Rightarrow f'(x)=3x^2-9x^{\frac{1}{2}}=3x^2-9\cdot\sqrt{x}.$

19b $g(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x+1}=\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{x+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{(x+1)\cdot 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{1\frac{1}{2}}\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{1\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}x\sqrt{x}+1\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x+1)^2}.$

19c $h(x)=\frac{2\sqrt{x}}{x^2+2}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x^2+2} \Rightarrow h'(x)=\frac{(x^2+2)\cdot x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{x^{1\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}-4x^{1\frac{1}{2}}}{(x^2+2)^2}=\frac{-3x\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}}{(x^2+2)^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{-3x^2+2}{\sqrt{x}\cdot(x^2+2)^2}.$

20a $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{x}-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x\cdot\sqrt{x}}.$

20b $g(x)=\frac{x+1}{x\sqrt{x}}=\frac{x}{x^{1\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{1\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$g'(x)=-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}-1\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}}-\frac{3}{2x^{2\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{x}-\frac{3}{2x^2\cdot\sqrt{x}}=\frac{-x-3}{2x^2\cdot\sqrt{x}}.$

20c $h(x)=\frac{x^2+2}{2\sqrt{x}}=\frac{x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{x^2}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$h'(x)=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{x}}{4}-\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}}=\frac{3\sqrt{x}}{4}\cdot\frac{x\cdot\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3x^2-2}{4x\cdot\sqrt{x}}.$

21 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}.$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(\frac{1}{8})=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=\frac{2}{3\cdot\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}.$

k: $y=\frac{4}{3}x+b$
$f(\frac{1}{8})=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4} \Rightarrow$ door $A(\frac{1}{8},\ \frac{1}{4})$
$\Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{8}+b$
$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+b$
$\frac{1}{12}=b.$ Dus k: $y=1\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}.$

Stel l: $y=ax+b$ met $a=f'(8)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{8}}=\frac{2}{3\cdot 2}=\frac{1}{3}.$

l: $y=\frac{1}{3}x+b$
$f(8)=\sqrt[3]{64}=4 \Rightarrow$ door $B(8,\ 4)$
$\Rightarrow 4=\frac{1}{3}\cdot 8+b$
$4=2\frac{2}{3}+b$
$1\frac{1}{3}=b.$ Dus l: $y=\frac{1}{3}x+1\frac{1}{3}.$

Nu k snijden met l: $1\frac{1}{3}x+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}x+1\frac{1}{3} \Rightarrow x=1\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=1\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=1\frac{3}{12}=1\frac{1}{4} \Rightarrow x_C=1\frac{1}{4}.$

$x_C=1\frac{1}{4}$ invullen in $y=\frac{1}{3}x+1\frac{1}{3} \Rightarrow y_C=\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{4}+1\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}+1\frac{1}{3}=\frac{5}{12}+1\frac{4}{12}=1\frac{9}{12}=1\frac{3}{4}.$

22a $f(x)=x\cdot\sqrt{x}-3x=x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}-3x=x^{1\frac{1}{2}}-3x \Rightarrow f'(x)=1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-3=1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}-3.$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(0)=-3.$ Dus k: $y=-3x.$

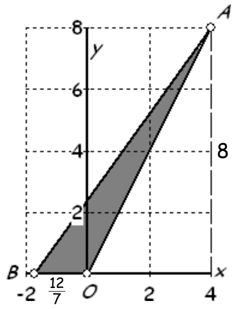
22b $f'(x)=3 \Rightarrow 1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}-3=3 \Rightarrow 1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=6 \Rightarrow \sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16.$

l: $y=3x+b$
$f(16)=16\cdot\sqrt{16}-3\cdot 16=16\cdot 4-3\cdot 16=16$
$\Rightarrow 16=3\cdot 16+b$
$-32=b.$ Dus l: $y=3x-32.$

23 $f(x)=\frac{5x\sqrt{x}}{x+1}=\frac{5x^{1\frac{1}{2}}}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 5\cdot 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-5x^{1\frac{1}{2}}\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{7\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-5x^{1\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}=\frac{2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+7\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2}=\frac{2\frac{1}{2}x\sqrt{x}+7\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x+1)^2}.$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(4)=\frac{2\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{4}+7\frac{1}{2}\sqrt{4}}{(4+1)^2}=\frac{2\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2+7\frac{1}{2}\cdot 2}{25}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}.$

k: $y=\frac{7}{5}x+b$
$f(4)=\frac{5\cdot 4\cdot\sqrt{4}}{4+1}=\frac{5\cdot 4\cdot 2}{5}=8 \Rightarrow$ door $A(4,\ 8)$
$\Rightarrow 8=\frac{7}{5}\cdot 4+b$
$8=\frac{28}{5}+b$
$\frac{12}{5}=b.$ Dus k: $y=\frac{7}{5}x+\frac{12}{5}.$



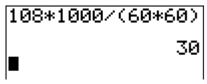
k snijden met de x-as ($y=0$) $\Rightarrow \frac{7}{5}x+\frac{12}{5}=0 \Rightarrow 7x=-12 \Rightarrow x=-\frac{12}{7} \Rightarrow B(-\frac{12}{7},\ 0).$

$O_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times\text{basis}\times\text{hoogte}=\frac{1}{2}\times OB\times y_A=\frac{1}{2}\times\frac{12}{7}\times 8=\frac{48}{7}=6\frac{6}{7}.$

24a $s(t)=10t\cdot\sqrt{t}=10t^1\cdot t^{\frac{1}{2}}=10t^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow s'(t)=v(t)=10\cdot 1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=15\cdot\sqrt{t}.$ Dus $v(1)=15\cdot\sqrt{1}=15$ (m/s).

24b $108\ \frac{\text{km}}{\text{uur}}=\frac{108\times 1000}{60\times 60}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}=30\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$

$v(t)=15\cdot\sqrt{t}=30 \Rightarrow \sqrt{t}=2 \Rightarrow t=4$ (seconden).

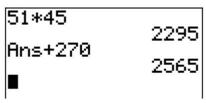


24c $s(9)=10\cdot 9\cdot\sqrt{9}=10\cdot 9\cdot 3=270$ (m) en $v(9)=15\cdot\sqrt{9}=15\cdot 3=45$ (m/s).

De eerste 9 seconden wordt 270 meter afgelegd.

Gedurende de volgende $60-9=51$ seconden wordt $51\cdot 45=2\,295$ meter afgelegd.

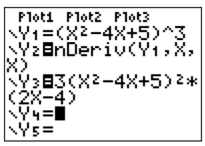
Dus in de eerste minuut legt de trein $270+2\,295=2\,565$ meter af.

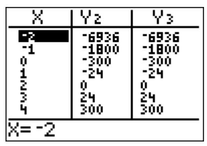


25a $f(x)=(x^2-5x)^2=(x^2-5x)\cdot(x^2-5x) \Rightarrow f'(x)=(2x-5)\cdot(x^2-5x)+(x^2-5x)\cdot(2x-5)=2\cdot(2x-5)\cdot(x^2-5x).$

25b $f(x)=(x^2-5x)\cdot(x^2-5x) \Rightarrow f'(x)=[x^2-5x]'\cdot(x^2-5x)+(x^2-5x)\cdot[x^2-5x]'=2\cdot(x^2-5x)\cdot[x^2-5x]'.$

26 De functie h is de hellingfunctie van g.





In plaats van de ketting u te benoemen zet ik er een blok om de ketting.

LEER VAN BUITEN:
$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

27a $f(x)=-2\cdot(2x+1)^4 \Rightarrow f'(x)=-8\cdot(\boxed{2x+1})^3\cdot 2=-16(2x+1)^3.$

27b $g(x)=\frac{1}{(3x-2)^2}=(3x-2)^{-2} \Rightarrow g'(x)=-2\cdot(\boxed{3x-2})^{-3}\cdot 3=\frac{-6}{(3x-2)^3}.$

27c $h(x)=\sqrt{2x^2+4x} \Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{2x^2+4x}}}\cdot(4x+4)=\frac{4x+4}{2\cdot\sqrt{2x^2+4x}}=\frac{2x+2}{\sqrt{2x^2+4x}}.$

27d $j(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-1}}=\frac{1}{(4x-1)^{\frac{1}{2}}}=(4x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow j'(x)=-\frac{1}{2}\cdot(\boxed{4x-1})^{-1\frac{1}{2}}\cdot 4=\frac{-4}{2\cdot(4x-1)^{1\frac{1}{2}}}=\frac{-2}{(4x-1)\cdot\sqrt{4x-1}}.$

27e $k(x)=(x^2+3)\cdot\sqrt{x^2+3}=(x^2+3)^{1\frac{1}{2}}\Rightarrow k'(x)=1\frac{1}{2}\cdot(\boxed{x^2+3})^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\cdot\sqrt{x^2+3}.$

27f $l(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}=(x^2+2x+3)^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow l'(x)=-\frac{1}{2}\cdot(\boxed{x^2+2x+3})^{-1\frac{1}{2}}\cdot(2x+2)=-\frac{2x+2}{2\cdot(x^2+2x+3)^{1\frac{1}{2}}}=\frac{-x-1}{(x^2+2x+3)\cdot\sqrt{x^2+2x+3}}.$

28a $f(x)=4\cdot(x^3+7x-2)^2\Rightarrow f'(x)=8\cdot(\boxed{x^3+7x-2})^1\cdot(3x^2+7)=8\cdot(x^3+7x-2)\cdot(3x^2+7).$

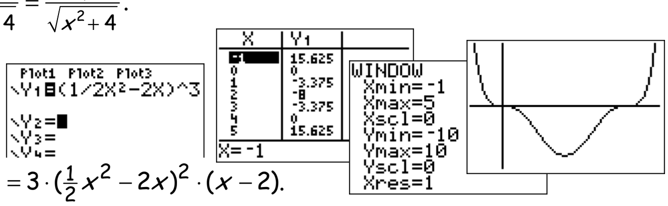
28b $g(x)=-\frac{6}{(x^2+3x)^3}=-6\cdot(x^2+3x)^{-3}\Rightarrow g'(x)=-6\cdot -3\cdot(\boxed{x^2+3x})^{-4}\cdot(2x+3)=\frac{18\cdot(2x+3)}{(x^2+3x)^4}.$

28c $h(x)=\sqrt[3]{x^3+3x}=(x^3+3x)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{3}\cdot(\boxed{x^3+3x})^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2+3)=\frac{3x^2+3}{3\cdot(x^3+3x)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+3x)^2}}.$

28d $j(x)=\frac{1}{(4-x)\cdot\sqrt{4-x}}=\frac{1}{(4-x)^{1\frac{1}{2}}}=(4-x)^{-1\frac{1}{2}}\Rightarrow j'(x)=-1\frac{1}{2}\cdot(\boxed{4-x})^{-2\frac{1}{2}}\cdot -1=\frac{3}{2\cdot(4-x)^{2\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\cdot(4-x)^2\cdot\sqrt{4-x}}.$

28e $k(x)=5\cdot\sqrt{2x^4+x^2}+4x^2\Rightarrow k'(x)=5\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{2x^4+x^2}}}\cdot(8x^3+2x)+8x=\frac{5\cdot(8x^3+2x)}{2\cdot\sqrt{2x^4+x^2}}+8x=\frac{5\cdot(4x^3+x)}{\sqrt{2x^4+x^2}}+8x.$

28f $l(x)=\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow l'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^2+4}}}\cdot 2x=\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$



29a Maak een schets van de plot hiernaast. (gebruik de tabel)

29b Raaklijn horizontaal als $f'(x)=0$.

$f(x)=(\frac{1}{2}x^2-2x)^3\Rightarrow f'(x)=3\cdot(\boxed{\frac{1}{2}x^2-2x})^2\cdot(\frac{1}{2}\cdot 2x-2)=3\cdot(\frac{1}{2}x^2-2x)^2\cdot(x-2).$

$3\cdot(\frac{1}{2}x^2-2x)^2\cdot(x-2)=0$

$\frac{1}{2}x^2-2x=0$ of $x-2=0$

$x^2-4x=0$ of $x=2$

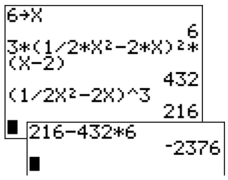
$x\cdot(x-4)=0$ of $x=2$

$x=0$ of $x=4$ of $x=2$

29c Stel l: $y=ax+b$ met $a=f'(6)=432$.

l: $y=432x+b$
$f(6)=216\Rightarrow$ door $A(6,\ 216)$ $\Big\}\Rightarrow 216=432\cdot 6+b$
$-2376=b.$

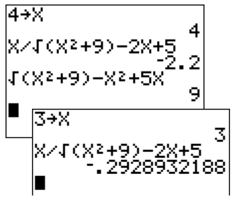
Dus l: $y=432x-2376$.



30a $f(x)=\sqrt{x^2+9}-x^2+5x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^2+9}}}\cdot 2x-2x+5=\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}-2x+5=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-2x+5.$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(4)=-2{,}2$.

k: $y=-2{,}2x+b$
$f(4)=9\Rightarrow$ door $A(4,\ 9)$ $\Big\}\Rightarrow 9=-2{,}2\cdot 4+b$
$9+8{,}8=17{,}8=b.$ Dus k: $y=-2{,}2x+17{,}8$.



30b $f'(3)=\frac{3}{\sqrt{3^2+9}}-2\cdot 3+5=\frac{3}{\sqrt{18}}-1\neq 0\Rightarrow$ geen horizontale raaklijn voor $x=3$.

30c l evenwijdig met $m\Rightarrow \text{rc}_l=\text{rc}_m=5$

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-2x+5=5$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-2x=0$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=2x$ (kwadrateren)

$\frac{x^2}{x^2+9}=\frac{4x^2}{1}$ (kruisproducten)

$4x^2\cdot(x^2+9)=x^2\cdot 1$

$4x^4+36x^2-x^2=0$

$4x^4+35x^2=0$

$x^2\cdot(4x^2+35)=0$

$x^2=0$ of $4x^2+35=0$

$x=0$ of $4x^2=-35$ (kan niet).

l: $y=5x+b$
$f(0)=\sqrt{9}=3\Rightarrow A(0,\ 3)$ $\Big\}\Rightarrow 3=b.$
Dus l: $y=5x+3$.

31 $f(x)=x\cdot\sqrt{2x+1}$ is het product van de factoren x en $\sqrt{2x+1}$
De afgeleide van $\sqrt{2x+1}$ bereken je met de kettingregel omdat in $\sqrt{2x+1}$ de ketting $\boxed{2x+1}$ zit.

32a $f(x)=x\cdot\sqrt{3x+1}\Rightarrow f'(x)=1\cdot\sqrt{3x+1}+x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{3x+1}}}\cdot 3=\sqrt{3x+1}+\frac{3x}{2\cdot\sqrt{3x+1}}.$

32b $g(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{(2x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^2+1}}}\cdot 2x-\sqrt{x^2+1}\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{\frac{(2x+1)\cdot x}{\sqrt{x^2+1}}-2\cdot\sqrt{x^2+1}}{(2x+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x^2+x-2\cdot(x^2+1)}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}=$

$=\frac{2x^2+x-2x^2-2}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}=\frac{x-2}{(2x+1)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}.$

32c $h(x)=x\cdot(3x+1)^3 \Rightarrow h'(x)=1\cdot(3x+1)^3+x\cdot 3\cdot(\boxed{3x+1})^2\cdot 3=(3x+1)^3+9x(3x+1)^2.$

32d $k(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{4x+1}} \Rightarrow k'(x)=\frac{\sqrt{4x+1}\cdot 2x-(x^2-1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{4x+1}}}\cdot 4}{(\sqrt{4x+1})^2}=\frac{\sqrt{4x+1}\cdot 2x-\frac{2\cdot(x^2-1)}{\sqrt{4x+1}}}{4x+1}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{4x+1}}=$

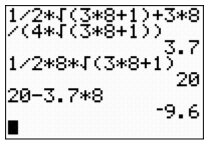
$=\frac{(4x+1)\cdot 2x-2\cdot(x^2-1)}{(4x+1)\cdot\sqrt{4x+1}}=\frac{8x^2+2x-2x^2+2}{(4x+1)\cdot\sqrt{4x+1}}=\frac{6x^2+2x+2}{(4x+1)\cdot\sqrt{4x+1}}.$

33 $f(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{3x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3x+1}+\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{3x+1}}}\cdot 3=\frac{1}{2}\sqrt{3x+1}+\frac{3x}{4\cdot\sqrt{3x+1}}.$

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(8)=\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 8+1}+\frac{3\cdot 8}{4\cdot\sqrt{3\cdot 8+1}}=\frac{1}{2}\sqrt{25}+\frac{24}{4\cdot\sqrt{25}}=\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{24}{4\cdot 5}=\frac{5}{2}+\frac{6}{5}=\frac{25}{10}+\frac{12}{10}=\frac{37}{10}=3{,}7.$

k: $y=3{,}7x+b$
$f(8)=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{25}=4\cdot 5=20 \Rightarrow$ door $A(8,\ 20)$ $\Big\} \Rightarrow 20=3{,}7\cdot 8+b$
$20-3{,}7\cdot 8=-9{,}6=b.$

Dus k: $y=3{,}7x-9{,}6.$



34a $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}\cdot 1-(x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^2+4}}}\cdot 2x}{(\sqrt{x^2+4})^2}=\frac{\sqrt{x^2+4}-\frac{x\cdot(x+1)}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}=$

$=\frac{x^2+4-x\cdot(x+1)}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4-x^2-x}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{-x+4}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}.$

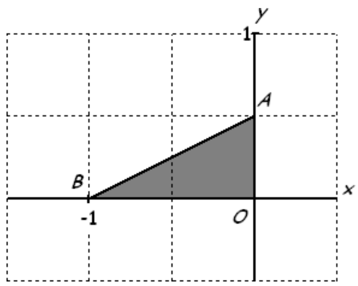
$f'(x)=0$ geeft $\frac{-x+4}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=0 \Rightarrow -x+4=0 \Rightarrow 4=x$ en $y=f(4)=\frac{4+1}{\sqrt{4^2+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{5}{\sqrt{4\cdot 5}}=\frac{5}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{10}=\frac{1}{2}\sqrt{5}.$

34b f snijden met de y-as $(x=0) \Rightarrow f(0)=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ door $A(0,\ \frac{1}{2})$ en $f'(0)=\frac{4}{4\cdot\sqrt{4}}=\frac{1}{2}.$

k: $y=\frac{1}{2}x+b$
door $A(0,\ \frac{1}{2})$ $\Big\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0+b$
$\frac{1}{2}=b \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ snijden met de x-as $(y=0) \Rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-1 \Rightarrow B(-1,\ 0).$

$O_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times\text{basis}\times\text{hoogte}=\frac{1}{2}\times OB\times OA=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$



35a $g(x)=(x+6)\cdot(8x+9)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)=1\cdot(8x+9)^{-\frac{1}{2}}+(x+6)\cdot -\frac{1}{2}(\boxed{8x+9})^{-1\frac{1}{2}}\cdot 8=\frac{1}{(8x+9)^{\frac{1}{2}}}-\frac{4\cdot(x+6)}{(8x+9)^{1\frac{1}{2}}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{8x+9}}-\frac{4\cdot(x+6)}{(8x+9)\cdot\sqrt{8x+9}}=\frac{1}{\sqrt{8x+9}}\cdot\frac{8x+9}{8x+9}-\frac{4\cdot(x+6)}{(8x+9)\cdot\sqrt{8x+9}}=\frac{8x+9-4x-24}{(8x+9)\cdot\sqrt{8x+9}}=\frac{4x-15}{(8x+9)\cdot\sqrt{8x+9}}.$

35b $f(x)=(x+1)\cdot(x^2+4)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=1\cdot(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}+(x+1)\cdot -\frac{1}{2}(\boxed{x^2+4})^{-1\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{1}{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}-\frac{x\cdot(x+1)}{(x^2+4)^{1\frac{1}{2}}}=$

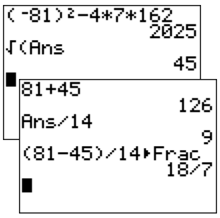
$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{x\cdot(x+1)}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x^2+4}{x^2+4}+\frac{-x^2-x}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4-x^2-x}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{-x+4}{(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}.$

36a $5-2\cdot\sqrt{x}=2$
$-2\cdot\sqrt{x}=-3$
$\sqrt{x}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ (kwadrateren)
$x=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$ (voldoet).

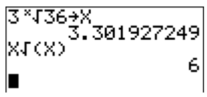
36b $6+x\cdot\sqrt{x}=10$
$x\cdot\sqrt{x}=4$ (kwadrateren)
$x^3=16$
$x=\sqrt[3]{16}$ (voldoet).

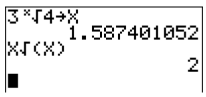
36c $\frac{5x^2-10}{x^2-4}=0$
(teller = 0 en noemer ≠ 0)
$5x^2-10=0$
$5x^2=10$
$x^2=2$
$x=\sqrt{2}$ of $x=-\sqrt{2}$ (voldoen).

36d $x^4-5x^2+4=0$
(stel x^2 tijdelijk t)
$t^2-5t+4=0$
$(t-4)\cdot(t-1)=0$
$t=x^2=4$ of $t=x^2=1$
$x=2$ of $x=-2$ of $x=1$ of $x=-1.$



36e $x^3-8x\cdot\sqrt{x}+12=0$
(stel $x\cdot\sqrt{x}$ tijdelijk t)
$t^2-8t+12=0$
$(t-6)\cdot(t-2)=0$
$t=x\sqrt{x}=6$ of $t=x\sqrt{x}=2$ (kwadrateren)
$x^3=36$ of $x^3=4$
$x=\sqrt[3]{36}$ of $x=\sqrt[3]{4}$ (voldoen).





36f $\frac{5x^2-10}{(x^2-4)^2}=1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$ (kruiselings vermenigvuldigen)
$5\cdot(5x^2-10)=7\cdot(x^2-4)^2$
$25x^2-50=7\cdot(x^4-8x^2+16)$
$25x^2-50=7x^4-56x^2+112$
$0=7x^4-81x^2+162$ (stel x^2 tijdelijk t)
$7t^2-81t+162=0$ (abc-formule)
$D=(-81)^2-4\cdot 7\cdot 162=2\,025 \Rightarrow \sqrt{D}=45$
$t=x^2=\frac{81+45}{14}=9$ of $t=x^2=\frac{81-45}{14}=\frac{18}{7}$
$x=3$ of $x=-3$ of $x=\sqrt{2\frac{4}{7}}$ of $x=-\sqrt{2\frac{4}{7}}.$
(alle vier voldoen want de noemer wordt niet nul)

37 $f(x)=6x-2x\cdot\sqrt{x}=6x-2x^{1\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=6-2\cdot1\tfrac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=6-3\cdot\sqrt{x}$.

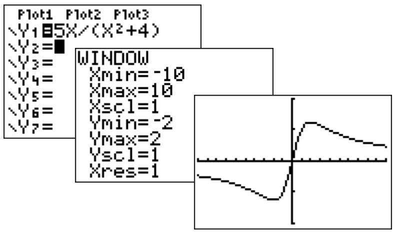
$f'(x)=0\Rightarrow 6-3\cdot\sqrt{x}=0$

$-3\cdot\sqrt{x}=-6$

$\sqrt{x}=\frac{-6}{-3}=2$ (kwadrateren)

$x=4$ (voldoet) en $y=f(4)=6\cdot4-2\cdot4\cdot\sqrt{4}=24-8\cdot2=8\Rightarrow T(4,\ 8)$.

38a $f(x)=\frac{5x}{x^2+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+4)\cdot5-5x\cdot2x}{(x^2+4)^2}=\frac{5x^2+20-10x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$.



$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}=0$ ($\Rightarrow$ teller $=0$ en noemer $\neq 0$)

$-5x^2+20=0$

$-5x^2=-20$

$x^2=4$

$x=2$ (voldoet) of $x=-2$ (voldoet)

minimium (zie plot) $f(-2)=\frac{5\cdot-2}{(-2)^2+4}=\frac{-10}{8}=-1\tfrac{1}{4}$; maximium (zie plot) $f(2)=\frac{5\cdot2}{2^2+4}=\frac{10}{8}=1\tfrac{1}{4}$ en $B_f=[-1\tfrac{1}{4},\ 1\tfrac{1}{4}]$.

38b $\frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}=\frac{3}{5}$ (kruiselings vermenigvuldigen)

$3\cdot(x^2+4)^2=5\cdot(-5x^2+20)$

$3\cdot(x^4+8x^2+16)=-25x^2+100$

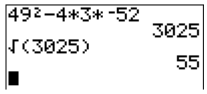
$3x^4+24x^2+48=-25x^2+100$

(ga hiernaast verder)

$3x^4+49x^2-52=0$ (stel x^2 tijdelijk t)

$3t^2+49t-52=0$ (abc-formule)

$D=49^2-4\cdot3\cdot-52=3025\Rightarrow\sqrt{D}=55$



$t=x^2=\frac{-49+55}{6}=1$ of $t=x^2=\frac{-49-55}{6}=\frac{-104}{6}=-...$ (kan niet)

$x=1$ of $x=-1$. (voldoen want de noemer van f en f' wordt niet nul).

39a $8-2x\geq0$ (onder het $\sqrt{\ }$-teken mag niet negatief worden)

$-2x\geq-8$ ($\geq$-teken klapt om bij het delen door een negatief getal)

$x\leq4\Rightarrow D_f=\langle\leftarrow,4]$.

39b $f(x)=x\cdot\sqrt{8-2x}\Rightarrow f'(x)=1\cdot\sqrt{8-2x}+x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{8-2x}}\cdot-2=\frac{8-2x}{\sqrt{8-2x}}-\frac{x}{\sqrt{8-2x}}=\frac{8-2x-x}{\sqrt{8-2x}}=\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}$.

39c $f'(x)=0\Rightarrow\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}=0$ ($\Rightarrow$ teller $=0$ en noemer $\neq0$)

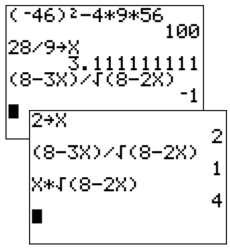
$8-3x=0$

$-3x=-8$

$x=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3}$ (voldoet)

$f(\frac{8}{3})=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{8-2\cdot\frac{8}{3}}=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{24}{3}-\frac{16}{3}}=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{3}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{24}=\frac{8}{9}\cdot\sqrt{4\cdot6}=\frac{16}{9}\cdot\sqrt{6}\Rightarrow$ top $T(\frac{8}{3},\ \frac{16}{9}\cdot\sqrt{6})$.

$B_f=\langle\leftarrow,\ \frac{16}{9}\cdot\sqrt{6}]$ (gebruik de berekening hierboven en de grafiek in figuur 7.5).



39d $f'(x)=1\Rightarrow\frac{8-3x}{\sqrt{8-2x}}=\frac{1}{1}$ (kruiselings verm.)

$8-3x=\sqrt{8-2x}$ (kwadrateren)

$(8-3x)^2=(\sqrt{8-2x})^2$

$64-48x+9x^2=8-2x$

$9x^2-46x+56=0$ (abc-formule)

$D=(-46)^2-4\cdot9\cdot56=100\Rightarrow\sqrt{D}=10$

$x=\frac{46+10}{18}=\frac{56}{18}=\frac{28}{9}=3\tfrac{1}{9}$ (voldoet niet aan $f'(x)=1$)

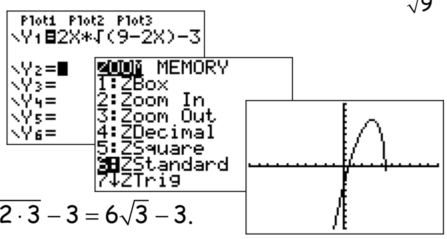
of $x=\frac{46-10}{18}=\frac{36}{18}=2$ (voldoet)

$x=2$ geeft $y=f(2)=4\Rightarrow A(2,\ 4)$.

40a $f(x)=2x\cdot\sqrt{9-2x}-3\Rightarrow f'(x)=2\cdot\sqrt{9-2x}+2x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{9-2x}}\cdot-2=\frac{2\cdot(9-2x)}{\sqrt{9-2x}}-\frac{2x}{\sqrt{9-2x}}=\frac{18-4x-2x}{\sqrt{9-2x}}=\frac{18-6x}{\sqrt{9-2x}}$.

f snijden met de y-as ($x=0$) $\Rightarrow f(0)=2\cdot0\cdot\sqrt{9-0}-3=0-3=-3\Rightarrow$ door $A(0,\ -3)$ en $f'(0)=\frac{18}{\sqrt{9}}=\frac{18}{3}=6$.

$\left.\begin{array}{l}k\text{: }y=6x+b\\ \text{door }A(0,\ -3)\end{array}\right\}\Rightarrow -3=6\cdot0+b\Rightarrow -3=b\Rightarrow k\text{: }y=6x-3$.



40b $f'(x)=0\Rightarrow\frac{18-6x}{\sqrt{9-2x}}=0$ ($\Rightarrow$ teller $=0$ en noemer $\neq0$)

$18-6x=0$

$18=6x$

$x=3$. Dit geeft maximum (zie ook plot) $y=f(3)=2\cdot3\cdot\sqrt{9-2\cdot3}-3=6\sqrt{3}-3$.

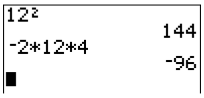
40c $9-2x\geq0$ (onder het $\sqrt{\ }$-teken mag niet negatief worden)

$-2x\geq-9$ ($\geq$-teken klapt om bij het delen door een negatief getal)

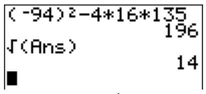
$x\leq4\tfrac{1}{2}\Rightarrow D_f=\langle\leftarrow,4\tfrac{1}{2}]$.

$B_f=\langle\leftarrow,\ 6\sqrt{3}-3]$.

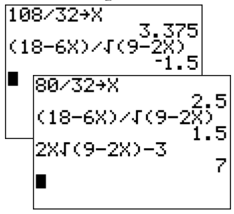
40d $f'(x)=1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{18-6x}{\sqrt{9-2x}}=\frac{3}{2}$ (kruiselings vermenigvuldigen)
$2\cdot(18-6x)=3\cdot\sqrt{9-2x}$
$36-12x=3\cdot\sqrt{9-2x}$
$12-4x=\sqrt{9-2x}$ (kwadrateren)
$12^2-2\cdot 12\cdot 4x+16x^2=9-2x$



$16x^2-94x+135=0$ (*abc*-formule)
$D=(-94)^2-4\cdot 16\cdot 135=196 \Rightarrow \sqrt{D}=14$



$x=\frac{94+14}{32}=\frac{108}{32}=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$ (voldoet niet aan $f'(x)=1\frac{1}{2}$)
of $x=\frac{94-14}{32}=\frac{80}{32}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ (voldoet)
$x=2\frac{1}{2}$ geeft $y=f(2\frac{1}{2})=7 \Rightarrow B(2\frac{1}{2},\ 7)$.

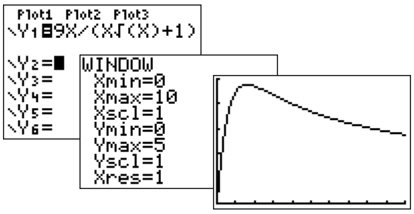


41a $f(x)=\frac{x^3+2}{\sqrt{x}}=\frac{x^3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x}}=x^{2\frac{1}{2}}+2\cdot x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}}+2\cdot -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}=2\frac{1}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$.
In de top is $f'(x)=0 \Rightarrow 2\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$
$\frac{5x\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{x\sqrt{x}}$
$5x^2\cdot(\sqrt{x})^2=2$
$x^3=\frac{2}{5}$
$x_A=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}=\sqrt[3]{0,4} \Rightarrow y_A=f(\sqrt[3]{0,4})=\frac{(\sqrt[3]{0,4})^3+2}{\sqrt{\sqrt[3]{0,4}}}=\frac{0,4+2}{((0,4)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}}=\frac{2,4}{(0,4)^{\frac{1}{6}}}=\frac{2,4}{\sqrt[6]{0,4}}$. Dus $a=2,4;\ b=6$ en $c=0,4$.

41b $f'(x)=1\frac{1}{2} \Rightarrow 2\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}}=\frac{5x^3}{2x\cdot\sqrt{x}}-\frac{2}{2x\cdot\sqrt{x}}=\frac{5x^3-2}{2x\cdot\sqrt{x}}=\frac{3}{2}$ (kruiselings vermenigvuldigen)
$2\cdot(5x^3-2)=3\cdot 2x\cdot\sqrt{x}$
$5x^3-2=3x\cdot\sqrt{x}$ (stel $x\sqrt{x}$ tijdelijk t)
$5t^2-3t-2=0$
$D=(-3)^2-4\cdot 5\cdot -2=49 \Rightarrow \sqrt{D}=7$
$t=x\sqrt{x}=\frac{3+7}{10}=\frac{10}{10}=1$ (voldoet)
of $t=x\sqrt{x}=\frac{3-7}{10}=\frac{-4}{10}=-\frac{2}{5}$ (mag niet wegens $\sqrt{x}$)
(na kwadrateren) $x^3=1 \Rightarrow x=1$ geeft $y=f(1)=3 \Rightarrow$ raakpunt (1, 3).
k: $y=1\frac{1}{2}x+b$
door (1, 3) $\Big\} \Rightarrow 3=1\frac{1}{2}\cdot 1+b \Rightarrow 1\frac{1}{2}=b$. Dus k: $y=1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$.

42a $f(x)=\frac{9x}{x\sqrt{x}+1}=\frac{9x}{x^{1\frac{1}{2}}+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x\sqrt{x}+1)\cdot 9-9x\cdot 1\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}}{(x\sqrt{x}+1)^2}=\frac{9x\sqrt{x}+9-13\frac{1}{2}x\sqrt{x}}{(x\sqrt{x}+1)^2}=\frac{-4\frac{1}{2}x\sqrt{x}+9}{(x\sqrt{x}+1)^2}$.
$x_A=4 \Rightarrow y_A=f(4)=\frac{9\cdot 4}{4\cdot\sqrt{4}+1}=\frac{36}{9}=4$ en $rc_k=f'(4)=\frac{-4\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{4}+9}{(4\cdot\sqrt{4}+1)^2}=\frac{-18\cdot 2+9}{(8+1)^2}=\frac{-27}{81}=-\frac{1}{3}$.
k: $y=-\frac{1}{3}x+b$
door (4, 4) $\Big\} \Rightarrow 4=-\frac{1}{3}\cdot 4+b \Rightarrow 5\frac{1}{3}=b$. Dus k: $y=-\frac{1}{3}x+5\frac{1}{3}$.

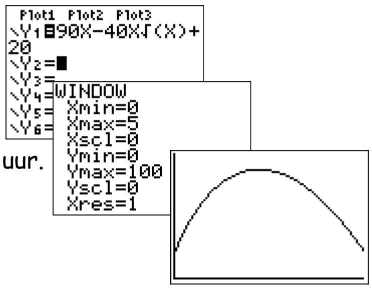
42b $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}+9}{(x\cdot\sqrt{x}+1)^2}=0$ ($\Rightarrow$ teller $=0$ en noemer $\neq 0$)
$-4\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}+9=0$
$-4\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}=-9$
$x\cdot\sqrt{x}=2$ (kwadrateren)
$x^3=4 \Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$.



Extreem (maximum volgens plot): $f(\sqrt[3]{4})=\frac{9\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{4}}+1}=\frac{9\cdot\sqrt[3]{4}}{4^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{6}}+1}=\frac{9\cdot\sqrt[3]{4}}{4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+1}=\frac{9\cdot\sqrt[3]{4}}{4^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{9\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt{4}+1}=\frac{9\cdot\sqrt[3]{4}}{3}=3\cdot\sqrt[3]{4}$.

42c $f'(x)=1\frac{1}{8} \Rightarrow \frac{-4\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{x}+9}{(x\cdot\sqrt{x}+1)^2}=\frac{9}{8}$
$8\cdot(-4\frac{1}{2}x\sqrt{x}+9)=9\cdot(x\sqrt{x}+1)^2$
$-36x\sqrt{x}+72=9\cdot(x\sqrt{x}+1)^2$
$-4x\sqrt{x}+8=(x\sqrt{x}+1)^2$
$-4x\sqrt{x}+8=x^3+2x\sqrt{x}+1$
$x^3+6x\sqrt{x}-7=0$ (stel $x\sqrt{x}$ tijdelijk t)
$t^2+6t-7=0$
$(t+7)\cdot(t-1)=0$
$t=x\sqrt{x}=-7$ (kan niet) of $t=x\sqrt{x}=1$ (voldoet)
(na kwadrateren) $x^3=1 \Rightarrow x_B=1$ en $y_B=f(1)=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2} \Rightarrow B(1,\ 4\frac{1}{2})$.

43a $N=90t-40t\sqrt{t}+20=90t-40t^{1\frac{1}{2}}+20 \Rightarrow \frac{dN}{dt}=N'=90-40\cdot 1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}=90-60\sqrt{t}$.
$\left[\frac{dN}{dt}\right]_{t=1}=90-60\cdot\sqrt{1}=90-60=30$.
Om 8 uur s'morgens neemt het aantal auto's dat per minuut passeert toe met 30 per uur.



43b $\frac{dN}{dt}=90-60\sqrt{t}=0 \Rightarrow 90=60\sqrt{t} \Rightarrow \sqrt{t}=\frac{3}{2}$ (kwadrateren) $\Rightarrow t=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$ (uur).
Dus $2\frac{1}{4}$ uur na 7 uur s'morgens $\Rightarrow$ 9:15.

43c Een AFNAME van 1 per twee minuten is een TOENAME van -30 per uur.

$\frac{dN}{dt} = 90 - 60\sqrt{t} = -30 \Rightarrow -60\sqrt{t} = -120 \Rightarrow \sqrt{t} = 2$ (kwadrateren) $\Rightarrow t = 4$ (uur).

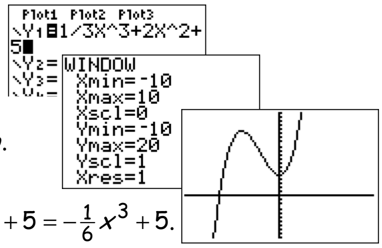
Dus 4 uur na 7 uur s'morgens $\Rightarrow$ 11:00.

44a $f_2(x) = x^3 + 2x^2 \Rightarrow f_2'(x) = 3x^2 + 4x$ en $f_5(x) = x^3 + 5x^2 \Rightarrow f_5'(x) = 3x^2 + 10x$.

44b $f_p(x) = x^3 + px^2 \Rightarrow f_p'(x) = 3x^2 + 2px$.

45 $f_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + px + 3 \Rightarrow f_p'(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2x + p = -\frac{1}{2}x + p$.

$f_p'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x + p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}x$.



46 $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5 \Rightarrow f_p'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + p \cdot 2x = x^2 + 2px$.

$f_p'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2px = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 2p) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x = -2p \Rightarrow x = 0$ of $-\frac{1}{2}x = p$.

$x = 0$ geeft $f_p(0) = 5$ en $f_p'(0) = 0 \Rightarrow$ top (0, 5).

$p = -\frac{1}{2}x$ invullen in $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5$ geeft $y = \frac{1}{3}x^3 + -\frac{1}{2}x \cdot x^2 + 5 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + 5 = -\frac{1}{6}x^3 + 5$.

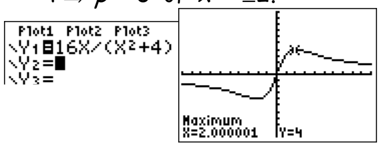
Dus de formule van de kromme waarop de toppen liggen is $y = -\frac{1}{6}x^3 + 5$. Ook het punt (0, 5) voldoet hieraan.

47 $f_p(x) = \frac{px}{x^2+4} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot p - px \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{px^2 + 4p - 2px^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-px^2 + 4p}{(x^2+4)^2}$.

$f_p'(x) = 0 \Rightarrow$ (teller = 0 en noemer $\neq 0$) $-px^2 + 4p = 0 \Rightarrow p \cdot (-x^2 + 4) = 0 \Rightarrow p = 0$ of $x^2 = 4 \Rightarrow p = 0$ of $x = \pm 2$.

$p = 0$ geeft $f_0(x) = 0$ en de grafiek hiervan (de x-as) heeft geen top.

Dus de toppen van de grafieken $f_p(x)$ liggen op de (verticale) lijnen $x = -2$ en $x = 2$.

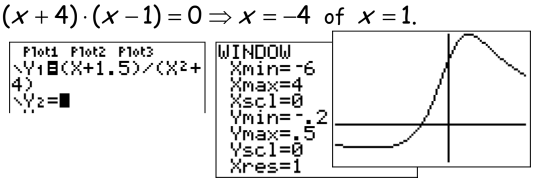


48a $f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - (x+p) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{x^2 + 4 - 2x^2 - 2px}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2 - 2px + 4}{(x^2+4)^2}$.

$f_p'(1) = 0 \Rightarrow$ (teller = 0 en noemer $\neq 0$) $-1^2 - 2p \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow 3 - 2p = 0 \Rightarrow 3 = 2p \Rightarrow p = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

$f_{1\frac{1}{2}}'(x) = \frac{-x^2 - 3x + 4}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+4) \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow x = -4$ of $x = 1$.

Minimum (zie ook figuur 7.7) is $f_{1\frac{1}{2}}(-4) = \frac{-4 + 1\frac{1}{2}}{(-4)^2 + 4} = \frac{-2\frac{1}{2}}{20} = -\frac{5}{40} = -\frac{1}{8}$.



48b $f_p(x) = \frac{x+p}{x^2+4} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{-x^2 - 2px + 4}{(x^2+4)^2}$ (zie 48a).

$f_p'(x) = 0 \Rightarrow$ (teller = 0 en noemer $\neq 0$) $-x^2 - 2px + 4 = 0 \Rightarrow -2px = -4 + x^2 \Rightarrow 2px = 4 - x^2 \Rightarrow p = \frac{4 - x^2}{2x}$ $(x \neq 0)$.

Nu $p = \frac{4 - x^2}{2x}$ invullen in $f_p(x)$ geeft als formule voor de kromme waarop de toppen liggen:

$$y = \frac{x + \frac{4-x^2}{2x}}{x^2+4} = \frac{\frac{2x^2}{2x} + \frac{4-x^2}{2x}}{x^2+4} = \frac{\frac{x^2+4}{2x}}{x^2+4} = \frac{x^2+4}{2x} \cdot \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0).$$

49 $-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = 10$ heeft één oplossing omdat de (horizontale) lijn $y = 10$ boven top B ligt. (zie figuur 7.8)

$-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x = -2\frac{1}{3}$ heeft twee oplossingen omdat de (horizontale) lijn $y = -2\frac{1}{3}$ door top A loopt.

50a $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow x = 3$ of $x = -2$.

$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 36 \cdot 3 + 10 = 2 \cdot 27 - 3 \cdot 9 - 108 + 10 = 54 - 27 - 108 + 10 = 27 - 98 = -71 \Rightarrow$ top $(3, -71)$.

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 36 \cdot -2 + 10 = 2 \cdot -8 - 3 \cdot 4 + 72 + 10 = -16 - 12 + 72 + 10 = -28 + 82 = 54 \Rightarrow$ top $(-2, 54)$.

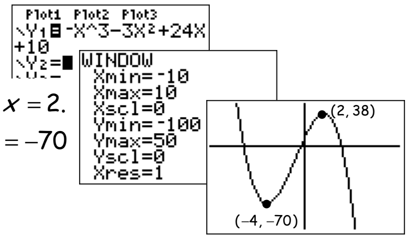
50b $f(x) = 25$ heeft drie oplossingen (de horizontale lijn $y = 25$ loopt tussen de toppen door de grafiek).

$f(x) = 75$ heeft één oplossing (de horizontale lijn $y = 75$ ligt boven de toppen).

50c $f(x) = p$ heeft drie oplossingen als de horizontale lijn $y = p$ tussen de toppen ligt $\Rightarrow -71 < p < 54$.

50d $f(x) = p$ heeft één oplossing voor $p < -71$ of $p > 54$ (de horizontale lijn $y = p$ ligt boven $(-2, 54)$ of onder $(3, -71)$).

50e $f(x) = p$ heeft twee oplossingen voor $p = -71$ of $p = 54$ (de horizontale lijn $y = p$ loopt dan door een top).



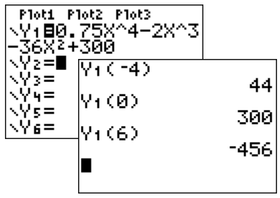
51a $f(x)=-x^3-3x^2+24x+10 \Rightarrow f'(x)=-3x^2-6x+24$.
$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2-6x+24=0 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x+4)\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x=-4$ of $x=2$.
Minimum (zie plot) $f(-4)=-(-4)^3-3\cdot(-4)^2+24\cdot -4+10=64-48-96+10=74-144=-70$
en maximum (zie plot) $f(2)=-2^3-3\cdot 2^2+24\cdot 2+10=-8-12+48+10=-20+58=38$.

51b $f(x)=-50$ heeft drie oplossingen en $f(x)=50$ heeft één oplossing (zie de plot en 51a).

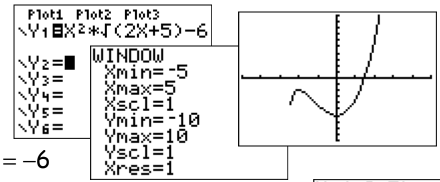
51c $f(x)=p$ heeft drie oplossingen voor $-70<p<38$.

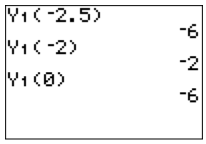
51d $f(x)=p$ heeft één oplossing voor $p<-70$ of $p>38$.

52 $f(x)=0{,}75x^4-2x^3-36x^2+300 \Rightarrow f'(x)=3x^3-6x^2-72x$.
$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^3-6x^2-72x=0 \Rightarrow 3x\cdot(x^2-2x-24)=0 \Rightarrow 3x\cdot(x-6)\cdot(x+4)=0 \Rightarrow x=0$ of $x=6$ of $x=-4$.
Minimum (zie figuur 7.11) $f(-4)=44$; maximum $f(0)=300$ en minimum $f(6)=-456$.
$f(x)=p$ heeft precies vier oplossingen voor $44<p<300$ (zie figuur 7.11 en gebruik extremen).
$f(x)=p$ heeft precies drie oplossingen voor $p=44$ of $p=300$.
$f(x)=p$ heeft precies twee oplossingen voor $-456<p<44$ of $p>300$.
$f(x)=p$ heeft precies één oplossing voor $p=-456$.
$f(x)=p$ heeft geen oplossingen voor $p<-456$.



53a $f(x)=x^2\cdot\sqrt{2x+5}-6$ ($x\ge -2{,}5$) $\Rightarrow f'(x)=2x\cdot\sqrt{2x+5}+x^2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{2x+5}}\cdot 2=2x\cdot\sqrt{2x+5}+\frac{x^2}{\sqrt{2x+5}}$ ($x>-2{,}5$).
$f'(x)=0 \Rightarrow 2x\cdot\sqrt{2x+5}+\frac{x^2}{\sqrt{2x+5}}=0$
$\frac{2x\cdot\sqrt{2x+5}}{1}=\frac{-x^2}{\sqrt{2x+5}}$ (kruiselings vermenigvuldigen)
$2x\cdot(2x+5)=-x^2$
$4x^2+10x=-x^2$ — randminimum $f(-2\frac{1}{2})=-6$
$5x^2+10x=0$ — maximum $f(-2)=-2$
$5x\cdot(x+2)=0$ — minimum $f(0)=-6$
$x=0$ of $x=-2$. — De toppen zijn $(-2\frac{1}{2},\ -6)$, $(-2,\ -2)$ en $(0,\ -6)$.



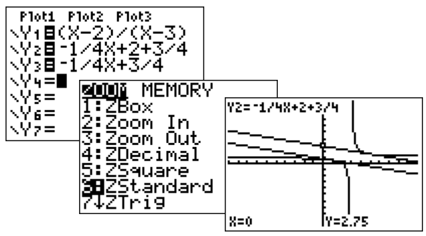


53b $f(x)=p$ heeft geen oplossingen voor $p<-6$ (zie plot en gebruik extremen).
$f(x)=p$ heeft precies één oplossing voor $p>-2$.
$f(x)=p$ heeft precies twee oplossingen voor $p=-6$ of $p=-2$.
$f(x)=p$ heeft precies drie oplossingen voor $-6<p<-2$.

54a De lijn $y=\frac{3}{4}x+1$ ligt hoger dan de bovenste raaklijn en loopt ermee evenwijdig $\Rightarrow \frac{6x}{x^2+3}=\frac{3}{4}x+1$ heeft één oplossing.

54b $\frac{6x}{x^2+3}=\frac{3}{4}x+p$ heeft drie oplossingen als de lijn $y=\frac{3}{4}x+p$ tussen de raaklijnen in loopt $\Rightarrow$ voor $-\frac{3}{4}<p<\frac{3}{4}$.

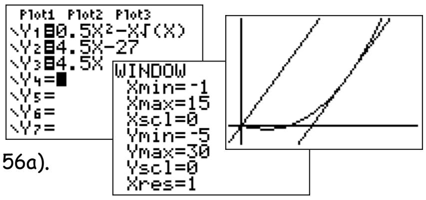
55a $f(x)=\frac{x-2}{x-3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x-3)\cdot 1-(x-2)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{x-3-x+2}{(x-3)^2}=\frac{-1}{(x-3)^2}$.
$f'(x)=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}=-\frac{1}{4}$ (kruiselings vermenigvuldigen) $\Rightarrow (x-3)^2=-1\cdot -4 \Rightarrow x-3=\pm 2 \Rightarrow x=3\pm 2$.
$x=3+2=5 \Rightarrow f(5)=\frac{5-2}{5-3}=\frac{3}{2} \Rightarrow$ raakpunt $(5,\ 1\frac{1}{2})$ en $x=3-2=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1-2}{1-3}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ raakpunt $(1,\ \frac{1}{2})$.
k_1: $y=-\frac{1}{4}x+b$ door $(5,\ 1\frac{1}{2})$ $\Rightarrow 1\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot 5+b \Rightarrow 1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}=b$. Dus k_1: $y=-\frac{1}{4}x+2\frac{3}{4}$.
k_2: $y=-\frac{1}{4}x+b$ door $(1,\ \frac{1}{2})$ $\Rightarrow \frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot 1+b \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=b$. Dus k_2: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$.



55b $\frac{x-2}{x-3}=-\frac{1}{4}x+p$ heeft geen oplossingen voor $\frac{3}{4}<p<2\frac{3}{4}$ (zie de plot en 55a).

56a $f(x)=0{,}5x^2-x\cdot\sqrt{x}$ ($x\ge 0$) $=0{,}5x^2-x^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=0{,}5\cdot 2x-1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}=x-1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}$ ($x\ge 0$).
$f'(x)=4\frac{1}{2} \Rightarrow x-1\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=4\frac{1}{2}$ (stel $\sqrt{x}=t$) $\Rightarrow t^2-1\frac{1}{2}t-4\frac{1}{2}=0$
$D=(1\frac{1}{2})^2-4\cdot 1\cdot -4\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}+18=20\frac{1}{4}=\frac{81}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$
$t=\sqrt{x}=\frac{1{,}5+4{,}5}{2}=3$ of $t=\sqrt{x}=\frac{1{,}5-4{,}5}{2}=-...$ (kan niet) $\Rightarrow x=3^2=9$ en $f(9)=0{,}5\cdot 9^2-9\cdot\sqrt{9}=40\frac{1}{2}-27=13\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 4\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (9, 13\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow 13\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} \cdot 9 + b \Rightarrow 13\frac{1}{2} - 40\frac{1}{2} = -27 = b$. Dus $k\text{: } y = 4\frac{1}{2}x - 27$.

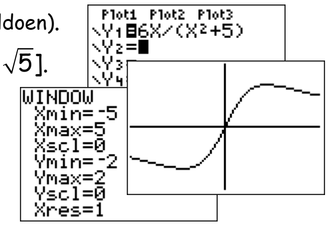


56b Door het beginpunt (0,0) van de grafiek van f gaat de lijn $y = 4\frac{1}{2}x + 0$.
$0{,}5x^2 - x \cdot \sqrt{x} = 4\frac{1}{2}x + p$ heeft twee oplossingen voor $-27 < p \le 0$ (zie de plot en 56a).

57a De lijn l: $y = x$ heeft drie snijpunten met de grafiek van f. ($0 < rc_l < 2$)
De lijn k: $y = 3x$ heeft één snijpunt met de grafiek van f. ($rc_k > 2$)

57b Voor $0 < a < 2$ ligt de lijn $y = ax$ tussen de x-as en de raaklijn k: $y = 2x$. (zie figuur 7.13)
Dus $y = ax$ heeft drie oplossingen voor $0 < a < 2$.

58a $f(x) = \frac{6x}{x^2+5}$ (de noemer is steeds positief, want $x^2 \ge 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+5)\cdot 6 - 6x \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{6x^2+30-12x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{-6x^2+30}{(x^2+5)^2}$.
$f'(x) = 0$ (teller $= 0$ en noemer $\neq 0$) $\Rightarrow -6x^2 + 30 = 0 \Rightarrow -6x^2 = -30 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$ (voldoen).
Min. (zie plot) $f(-\sqrt{5}) = \frac{6 \cdot -\sqrt{5}}{5+5} = \frac{-6\sqrt{5}}{10} = -\frac{3}{5}\sqrt{5}$; max. $f(\sqrt{5}) = \frac{6\sqrt{5}}{5+5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$ en $B_f = [-\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{3}{5}\sqrt{5}]$.

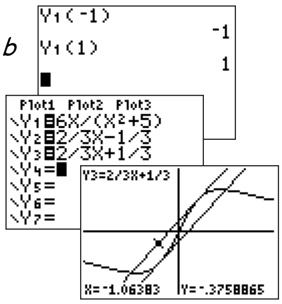


58b $f'(0) = \frac{30}{5^2} = \frac{30}{25} = 1\frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = ax$ heeft precies één oplossing voor $a \le 0$ of $a \ge 1\frac{1}{5}$.

58c De raaklijnen met rc $= \frac{2}{3}$ spelen een belangrijke rol.
$f'(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-6x^2+30}{(x^2+5)^2} = \frac{2}{3}$ (kruiselings vermenigvuldigen)
$2 \cdot (x^2+5)^2 = 3 \cdot (-6x^2 + 30)$
$2 \cdot (x^4 + 10x^2 + 25) = -18x^2 + 90$
$2x^4 + 20x^2 + 50 = -18x^2 + 90$
$2x^4 + 38x^2 - 40 = 0$ (stel $x^2 = t$ en deel door 2)
$t^2 + 19t - 20 = 0$
$(t + 20) \cdot (t - 1) = 0$
$t = x^2 = -20$ (kan niet) of $t = x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (ga hierboven verder)

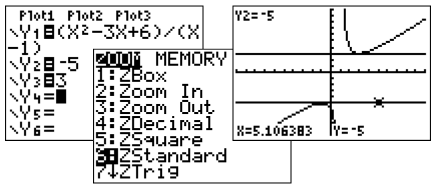
$\left.\begin{array}{l} k_1\text{: } y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } (-1, -1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 = \frac{2}{3} \cdot -1 + b \Rightarrow -\frac{1}{3} = b$
Dus k_1: $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} k_2\text{: } y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } (1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{2}{3} \cdot 1 + b \Rightarrow \frac{1}{3} = b$
Dus k_2: $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.



Dus $f(x) = \frac{2}{3}x + p$ heeft precies drie oplossingen voor $-\frac{1}{3} < p < \frac{1}{3}$. (zie ook de plot)

59a $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ ($x \neq 1$) $\Rightarrow f'(x) = \frac{(x-1)\cdot(2x-3) - (x^2-3x+6)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-3x-2x+3-x^2+3x-6}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ ($x \neq 1$).
$f'(x) = 0$ ($\Rightarrow$ teller $= 0$ en noemer $\neq 0$) $\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3$ (voldoet) of $x = -1$ (voldoet).
Maximum (zie plot) $f(-1) = \frac{1+3+6}{-1-1} = \frac{10}{-2} = -5$ en minimum $f(3) = \frac{9-9+6}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$.
Dus $f(x) = p$ heeft minstens één oplossing voor $p \le -5$ of $p \ge 3$. (zie ook de plot)

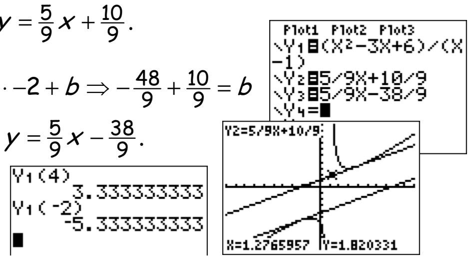


59b De raaklijnen met rc $= \frac{5}{9}$ spelen een belangrijke rol.
$f'(x) = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{5}{9}$ (kruiselings vermenigvuldigen)
$9 \cdot (x^2 - 2x - 3) = 5 \cdot (x-1)^2$
$9x^2 - 18x - 27 = 5 \cdot (x^2 - 2x + 1)$
$9x^2 - 18x - 27 = 5x^2 - 10x + 5$
$4x^2 - 8x - 32 = 0$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x - 4) \cdot (x + 2) = 0$
$x = 4$ (voldoet) of $x = -2$ (voldoet)

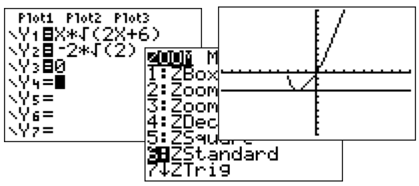
$\left.\begin{array}{l} k_1\text{: } y = \frac{5}{9}x + b \\ \text{door } (4, \frac{10}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{5}{9} \cdot 4 + b \Rightarrow \frac{30}{9} - \frac{20}{9} = \frac{10}{9} = b$
Dus k_1: $y = \frac{5}{9}x + \frac{10}{9}$.

$\left.\begin{array}{l} k_2\text{: } y = \frac{5}{9}x + b \\ \text{door } (-2, -\frac{16}{3}) \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{16}{3} = \frac{5}{9} \cdot -2 + b \Rightarrow -\frac{48}{9} + \frac{10}{9} = b$
Dus k_2: $y = \frac{5}{9}x - \frac{38}{9}$.

$f(4) = \frac{4^2-3\cdot 4+6}{4-1} = \frac{10}{3}$ en $f(-2) = \frac{(-2)^2-3\cdot -2+6}{-2-1} = \frac{16}{-3}$ (ga eerst hierboven verder)
Dus $f(x) = \frac{5}{9}x + p$ heeft geen oplossing voor $-\frac{38}{9} < p < \frac{10}{9}$. (zie ook de plot)



60a $f(x) = x \cdot \sqrt{2x+6}$ ($x \ge -3$) $\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x+6} + x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x+6}} \cdot 2 = \frac{\sqrt{2x+6}}{1} \cdot \frac{\sqrt{2x+6}}{\sqrt{2x+6}} + \frac{x}{\sqrt{2x+6}} = \frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}}$ ($x > -3$).
$f'(x) = 0$ ($\Rightarrow$ teller $= 0$ en noemer $\neq 0$) $\Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$ (voldoet).
Minimum (zie plot) $f(-2) = -2 \cdot \sqrt{-4+6} = -2 \cdot \sqrt{2}$ en randpunt $(-3, 0)$.
Dus $f(x) = p$ heeft precies twee oplossingen voor $-2\sqrt{2} < p \le 0$. (zie ook de plot)



60b De raaklijnen met $\text{rc} = 1\frac{1}{2}$ spelen een belangrijke rol.

$f\,'(x) = 1\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x+6}{\sqrt{2x+6}} = \frac{3}{2}$ (kruiselings vermenigvuldigen)

$2 \cdot (3x+6) = 3 \cdot \sqrt{2x+6}$

$6x + 12 = 3 \cdot \sqrt{2x+6}$

$2x + 4 = \sqrt{2x+6}$ (kwadrateren)

$4x^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4x + 16 = 2x + 6$

$4x^2 + 14x + 10 = 0$

$2x^2 + 7x + 5 = 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = 3$ (ga hierboven verder)

$x = \frac{-7-3}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$ (voldoet niet) of $x = \frac{-7+3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ (voldoet).

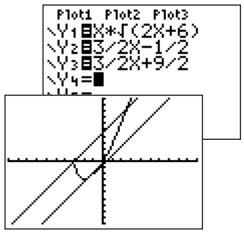
$f(-1) = -1 \cdot \sqrt{-2+6} = -1 \cdot 2 = -2.$ (nu de raaklijn én de lijn door randpunt)

$k_1\colon y = \frac{3}{2}x + b$, door $(-1,\ -2)$ $\Rightarrow -2 = \frac{3}{2} \cdot -1 + b \Rightarrow -\frac{1}{2} = b$

Dus $k_1\colon y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

$k_2\colon y = \frac{3}{2}x + b$, door $(-3,\ 0)$ $\Rightarrow 0 = \frac{3}{2} \cdot -3 + b \Rightarrow \frac{9}{2} = b$

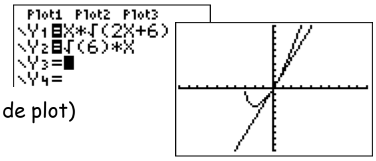
Dus $k_2\colon y = \frac{3}{2}x + 4\frac{1}{2}$.



Dus $f(x) = 1\frac{1}{2}x + p$ heeft precies twee oplossingen voor $-\frac{1}{2} < p \le 4\frac{1}{2}$. (zie ook de plot)

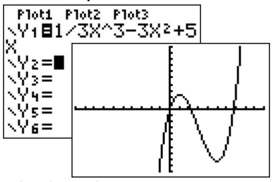
60c De raaklijn in de oorpsrong speelt een belangrijke rol.

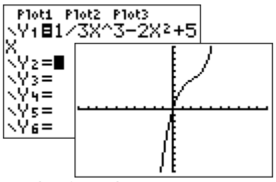
$f(0) = 0$ en $f\,'(0) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{6} = \sqrt{6} \Rightarrow$ de raaklijn in (0, 0) is $y = \sqrt{6} \cdot x$.

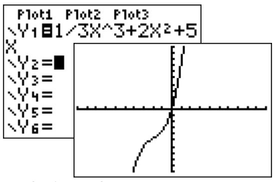


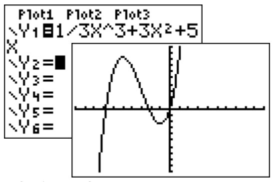
Dus $f(x) = ax$ heeft precies twee oplossingen voor $0 \le a < \sqrt{6}$ of $a > \sqrt{6}$. (zie ook de plot)

61a Zie de plots hieronder op de GR met ZStandard. (maak hier schetsen van in het huiswerkschrift)









61b f_{-3} heeft twee extremen; f_{-2} heeft geen extreem; f_2 heeft geen extreem; f_3 heeft twee extremen.

62 $p > \frac{1}{2} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow f_p'(x) = 0$ heeft geen oplossingen $\Rightarrow$ de hellinggrafiek $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - p$ ☹ geheel onder de x-as.

Dus de grafiek van f daalt steeds $\Rightarrow$ er zijn geen extremen voor $p > \frac{1}{2}$.

$p = \frac{1}{2} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow f_p'(x) = 0$ heeft één oplossing $\Rightarrow$ de hellinggrafiek $f_p'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - p$ ☹ raakt de x-as.

Dus de grafiek van f stijgt nergens (daalt steeds op het ene buigpunt na) $\Rightarrow$ er zijn geen extremen voor $p = \frac{1}{2}$.

63 $f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + px + 5 \Rightarrow f_p'(x) = -x^2 - 3x + p.$

$f_p(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + px + 5$ heeft twee extremen als $f_p'(x) = -x^2 - 3x + p$ ☹ $= 0$ twee oplossingen heeft.

$-x^2 - 3x + p = 0$ heeft twee oplossingen $\Rightarrow D = (-3)^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 9 + 4p > 0 \Rightarrow 4p > -9 \Rightarrow p > -\frac{9}{4}$.

64 $f_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + px^2 + 3x + 1 \Rightarrow f_p'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2px + 3.$

$f_p(x) = \frac{1}{4}x^3 + px^2 + 3x + 1$ heeft geen extremen als $f_p'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2px + 3$ ☺ $= 0$ één of geen oplossing heeft.

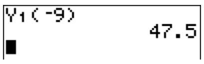
$\frac{3}{4}x^2 + 2px + 3 = 0$ heeft één of geen oplossing $\Rightarrow D = (2p)^2 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = 4p^2 - 9$ ☺ $\le 0 \Rightarrow 4p^2 \le 9 \Rightarrow p^2 \le \frac{9}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \le p \le \frac{3}{2}$.

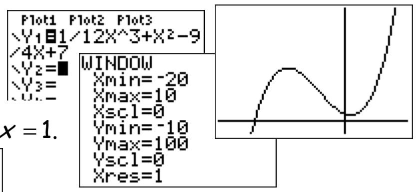
65a $f_p(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + px + 7 \Rightarrow f_p'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p.$

$f_p'(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + p = 0 \Rightarrow 2\frac{1}{4} + p = 0 \Rightarrow p = -\frac{9}{4}.$

$f_{-2\frac{1}{4}}'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x+9) \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow x = -9$ of $x = 1$.

Het andere extreem is het maximum (zie plot) $f_{-2\frac{1}{4}}(-9) = 47\frac{1}{2}$.





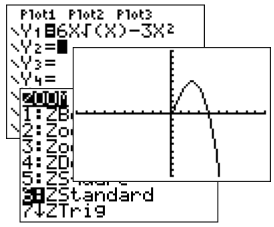
65b $f_p(x) = \frac{1}{12}x^3 + x^2 + px + 7$ heeft twee extremen als $f_p'(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + p$ ☺ $= 0$ twee oplossingen heeft.

$\frac{1}{4}x^2 + 2x + p = 0$ heeft twee oplossingen $\Rightarrow D = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot p = 4 - p > 0 \Rightarrow -p > -4 \Rightarrow p < 4.$

66a De lijn k met $\text{rc}_k = 2$ raakt de grafiek van f_p in A geeft $f_p'(x_A) = 2$. Omdat verder $x_A = 3$ geldt dus $f_p'(3) = 2$.

66b $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 + 5x - 3 \Rightarrow f_p'(x) = x^2 + 2px + 5.$

$f_p'(3) = 2 \Rightarrow 3^2 + 2p \cdot 3 + 5 = 2 \Rightarrow 14 + 6p = 2 \Rightarrow 6p = -12 \Rightarrow p = -2.$



67a $f_p(x) = 6x \cdot \sqrt{x} + px^2 = 6x^{1\frac{1}{2}} + px^2 \Rightarrow f_p'(x) = 9x^{\frac{1}{2}} + 2px = 9 \cdot \sqrt{x} + 2px.$

$f_p'(2\frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow 9 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} + 2p \cdot 2\frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 9 \cdot \frac{3}{2} + 4\frac{1}{2}p = 0 \Rightarrow 13\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}p = 0 \Rightarrow 4\frac{1}{2}p = -13\frac{1}{2} \Rightarrow p = -3.$

Dus f_p heeft een maximum (zie plot) voor $x = 2\frac{1}{4}$ als $p = -3$.

67b $f_p'(1) = 5 \Rightarrow 9 \cdot \sqrt{1} + 2p \cdot 1 = 5 \Rightarrow 9 + 2p = 5 \Rightarrow 2p = -4 \Rightarrow p = -2.$

Dus $f_{-2}(1) = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{1} - 2 \cdot 1^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow A(1,\ 4).$

k: $y = 5x + q$ door $A(1,\ 4) \Rightarrow 4 = 5 \cdot 1 + q \Rightarrow -1 = q$. Dus $p = -2$ en $q = -1$

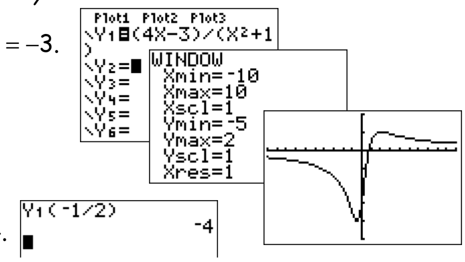
68a $f_p(x) = \frac{4x+p}{x^2+1}$ (de noemer is steeds positief $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$) $\Rightarrow f_p'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 4 - (4x+p)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2+4-8x^2-2px}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2-2px+4}{(x^2+1)^2}.$

Raakpunt R op de y-as ($x = 0$) $\Rightarrow y_R = f_p(0) = \frac{4\cdot 0+p}{0^2+1} = \frac{p}{1} = p,$ maar ook geldt: $y_R = a \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow p = 4.$

Verder is $a = f_p'(0) \Rightarrow a = \frac{-4\cdot 0^2 - 2p\cdot 0 + 4}{(0^2+1)^2} = \frac{4}{1} = 4.$ Dus $a = 4$ en $p = 4$.

68b $f_p'(-1) = -1 \Rightarrow \frac{-4\cdot(-1)^2 - 2p\cdot -1 + 4}{((-1)^2+1)^2} = \frac{-4+2p+4}{2^2} = \frac{2p}{4} = \frac{1}{2}p = -1 \Rightarrow p = -2$ en $y_A = f_{-2}(-1) = \frac{4\cdot -1 - 2}{(-1)^2+1} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow A(-1,\ -3).$

l: $y = -1 \cdot x + b$ door $A(-1,\ -3) \Rightarrow -3 = -1 \cdot -1 + b \Rightarrow -3 = 1 + b \Rightarrow -4 = b$. Dus l: $y = -x - 4$.



68c $f_p'(2) = 0 \Rightarrow \frac{-4\cdot 2^2 - 2p\cdot 2 + 4}{(2^2+1)^2} = \frac{-16-4p+4}{5^2} = 0 \Rightarrow -12 - 4p = 0 \Rightarrow -4p = 12 \Rightarrow p = -3.$

$f_{-3}'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -4x^2 + 6x + 4 = 0$

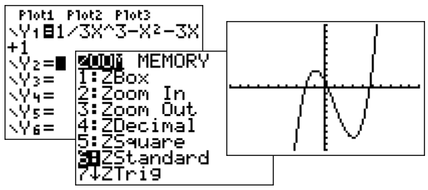
$D = 6^2 - 4 \cdot -4 \cdot 4 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \sqrt{D} = 10$

$x = \frac{-6-10}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$ (bekend) of $x = \frac{-6+10}{-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$ (tweede oplossing).

Het andere extreem is het minimum (zie plot) $f_{-3}(-\frac{1}{2}) = \frac{4\cdot -0{,}5 - 3}{(-0{,}5)^2+1} = \frac{-5}{1{,}25} = -4.$

69a $f_p(x) = \frac{1}{3}x^3 + px^2 - 3x - p \Rightarrow f_p'(x) = x^2 + 2px - 3.$

$x^2 + 2px - 3$ ☺ $= 0 \Rightarrow D = (2p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3 = 4p^2 + 12 \geq 12 > 0$ voor elke $p \Rightarrow f_p$ heeft twee extremen voor elke p.



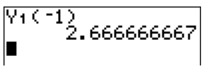
69b $f_p'(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + 2p \cdot 3 - 3 = 6 + 6p = 0 \Rightarrow 6p = -6 \Rightarrow p = -1.$

$f_{-1}'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+1) = 0$

$x = 3$ (bekend) of $x = -1$ (tweede oplossing).

Het andere extreem is het maximum (zie plot)

$f_{-1}(-1) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - 1\cdot(-1)^2 - 3\cdot -1 + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = 2\frac{2}{3}.$



69c $y_B = f_p(-2) = \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + p\cdot(-2)^2 - 3\cdot -2 - p = -2\frac{2}{3} + 4p + 6 - p = 3p + 3\frac{1}{3}$

$f_p'(-2) = rc_l = -1 \Rightarrow (-2)^2 + 2p \cdot -2 - 3 = 4 - 4p - 3 = 1 - 4p = -1 \Rightarrow -4p = -2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y_B = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} = 4\frac{5}{6}.$

l: $y = -x + q$ door $B(-2,\ 4\frac{5}{6}) \Rightarrow 4\frac{5}{6} = -1 \cdot -2 + q \Rightarrow 2\frac{5}{6} = q.$

70 $f_p(x) = \frac{9\cdot\sqrt{x^2+p}}{x^2+2} \Rightarrow f_p'(x) = \frac{(x^2+2)\cdot 9 \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+p}}\cdot 2x - 9\cdot\sqrt{x^2+p}\cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{\frac{9x\cdot(x^2+2)}{\sqrt{x^2+p}} - 18x\cdot\sqrt{x^2+p}}{(x^2+2)^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+p}}{\sqrt{x^2+p}}$

$= \frac{9x\cdot(x^2+2) - 18x\cdot(x^2+p)}{(x^2+2)^2\cdot\sqrt{x^2+p}} = \frac{9x^3 + 18x - 18x^3 - 18px}{(x^2+2)^2\cdot\sqrt{x^2+p}} = \frac{-9x^3 + 18x - 18px}{(x^2+2)^2\cdot\sqrt{x^2+p}}.$

$y_A = f_p(-1) = \frac{9\cdot\sqrt{(-1)^2+p}}{(-1)^2+2} = \frac{9\cdot\sqrt{1+p}}{3} = 3\cdot\sqrt{1+p}$ ❶

$f_p'(-1) = rc_k = 2\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-9\cdot(-1)^3 + 18\cdot -1 - 18p\cdot -1}{((-1)^2+2)^2\cdot\sqrt{(-1)^2+p}} = \frac{9-18+18p}{3^2\cdot\sqrt{1+p}} = \frac{-9+18p}{9\cdot\sqrt{1+p}} = \frac{-1+2p}{\sqrt{1+p}} = \frac{5}{2}$ ❷

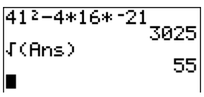
❷ $\Rightarrow 2\cdot(-1+2p) = 5\cdot\sqrt{1+p}$ (kwadrateren)

$4\cdot(1 - 4p + 4p^2) = 25\cdot(1+p)$

$4 - 16p + 16p^2 = 25 + 25p$

$16p^2 - 41p - 21 = 0$

$D = (-41)^2 - 4\cdot 16\cdot -21 = 3025 \Rightarrow \sqrt{D} = 55$



$p = \frac{41-55}{32} = \frac{-14}{32} = -\frac{7}{16}$ (voldoet niet) of $p = \frac{41+55}{32} = \frac{96}{32} = 3$ (voldoet) *GA HIERBOVEN VERDER ...*

$p = 3$ invullen in ❶ geeft

$y_A = f_3(-1) = 3\cdot\sqrt{1+3} = 3\cdot 2 = 6.$

k: $y = 2\frac{1}{2}x + b$ door $A(-1,\ 6)$ $\Rightarrow 6 = 2\frac{1}{2}\cdot -1 + b \Rightarrow 8\frac{1}{2} = b$

Dus k: $y = 2\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{2}$.

Diagnostische toets

D1a $f(x)=(x^2+3x)\cdot(3-7x)\Rightarrow f'(x)=(2x+3)\cdot(3-7x)+(x^2+3x)\cdot -7=(2x+3)\cdot(3-7x)-7\cdot(x^2+3x).$

D1b $g(x)=(3x^2+4)^2=(3x^2+4)\cdot(3x^2+4)\Rightarrow g'(x)=6x\cdot(3x^2+4)+(3x^2+4)\cdot 6x=12x\cdot(3x^2+4).$

D2a $f(x)=\frac{3x-7}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+2)\cdot 3-(3x-7)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{3x^2+6-6x^2+14x}{(x^2+2)^2}=\frac{-3x^2+14x+6}{(x^2+2)^2}.$

D2b $g(x)=3x-\frac{2}{x+4}\Rightarrow g'(x)=3-\frac{(x+4)\cdot 0-2\cdot 1}{(x+4)^2}=3-\frac{-2}{(x+4)^2}=3+\frac{2}{(x+4)^2}.$

D3 $f(x)=\frac{x^2-9}{3x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(3x+2)\cdot 2x-(x^2-9)\cdot 3}{(3x+2)^2}=\frac{6x^2+4x-3x^2+27}{(3x+2)^2}=\frac{3x^2+4x+27}{(3x+2)^2}.$

Snijpunten met de x-as $(y=0)\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-9}{3x+2}=0$ ($\Rightarrow$ teller $=0$ en noemer $\neq 0$)

$x^2-9=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm 3$. Dus $A(-3,\ 0)$ en $B(3,\ 0)$.

Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(-3)=\frac{27-12+27}{(-7)^2}=\frac{42}{49}=\frac{6}{7}$.

k: $y=\frac{6}{7}x+b$, door $A(-3,\ 0)$ $\Rightarrow 0=\frac{6}{7}\cdot -3+b$

$\frac{18}{7}=b$. Dus k: $y=\frac{6}{7}x+\frac{18}{7}$.

Stel l: $y=ax+b$ met $a=f'(3)=\frac{27+12+27}{11^2}=\frac{66}{121}=\frac{6}{11}$.

l: $y=\frac{6}{11}x+b$, door $B(3,\ 0)$ $\Rightarrow 0=\frac{6}{11}\cdot 3+b$

$-\frac{18}{11}=b$. Dus l: $y=\frac{6}{11}x-\frac{18}{11}$.

D4a $f(x)=\frac{2}{x^5}=2x^{-5}\Rightarrow f'(x)=-10x^{-6}=-\frac{10}{x^6}.$

D4b $g(x)=\frac{x^5+2}{x^3}=\frac{x^5}{x^3}+\frac{2}{x^3}=x^2+2x^{-3}\Rightarrow g'(x)=2x-6x^{-4}=2x-\frac{6}{x^4}.$

D4c $h(x)=\frac{3}{x}-\frac{x}{3}=3x^{-1}-\frac{1}{3}x\Rightarrow h'(x)=-3x^{-2}-\frac{1}{3}=-\frac{3}{x^2}-\frac{1}{3}.$

D5a $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x^2}=x^3+x^{\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(x)=3x^2+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=3x^2+\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}=3x^2+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}.$

D5b $g(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}=x^3\cdot x^{\frac{2}{3}}=x^{3\frac{2}{3}}\Rightarrow g'(x)=3\tfrac{2}{3}x^{2\frac{2}{3}}=3\tfrac{2}{3}x^2\cdot x^{\frac{2}{3}}=3\tfrac{2}{3}x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}.$

D5c $h(x)=\frac{x\cdot\sqrt{x}}{x^3+1}=\frac{x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^3+1}=\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{x^3+1}\Rightarrow h'(x)=\frac{(x^3+1)\cdot 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-x^{1\frac{1}{2}}\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{1\frac{1}{2}x^{3\frac{1}{2}}+1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}-3x^{3\frac{1}{2}}}{(x^3+1)^2}=\frac{-1\frac{1}{2}x^{3\frac{1}{2}}+1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}}{(x^3+1)^2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{-3x^3\cdot\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{2\cdot(x^3+1)^2}.$

D6 $f(x)=\frac{x^2-3}{x^2\cdot\sqrt{x}}=\frac{x^2}{x^{2\frac{1}{2}}}-\frac{3}{x^{2\frac{1}{2}}}=x^{-\frac{1}{2}}-3x^{-2\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}}+7\frac{1}{2}x^{-3\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2x^{1\frac{1}{2}}}+\frac{15}{2x^{3\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2x\cdot\sqrt{x}}+\frac{15}{2x^3\cdot\sqrt{x}}.$

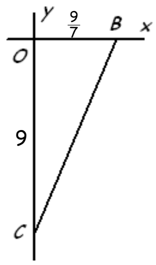
Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(1)=-\frac{1}{2}+\frac{15}{2}=7$.

k: $y=7x+b$, $f(1)=\frac{1^2-3}{1^2\cdot\sqrt{1}}=\frac{-2}{1}\Rightarrow A(1,\ -2)$ $\Rightarrow -2=7\cdot 1+b\Rightarrow -9=b$. Dus k: $y=7x-9$.

k snijden met de x-as $(y=0)\Rightarrow 0=7x-9\Rightarrow 9=7x\Rightarrow x=\frac{9}{7}\Rightarrow B(\frac{9}{7},\ 0)$.

k snijden met de y-as $(x=0)\Rightarrow y=7\cdot 0-9=-9\Rightarrow C(0,\ -9)$.

$O_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}\times\text{basis}\times\text{hoogte}=\frac{1}{2}\times OB\times OC=\frac{1}{2}\times\frac{9}{7}\times 9=\frac{81}{14}.$



D7a $f(x)=3(x^2+4x)^4\Rightarrow f'(x)=3\cdot 4(\boxed{x^2+4x})^3\cdot(2x+4)=12\cdot(x^2+4x)^3\cdot(2x+4).$

D7b $g(x)=(x^2+2)\cdot\sqrt{x^2+2}=(x^2+2)^1\cdot(x^2+2)^{\frac{1}{2}}=(x^2+2)^{1\frac{1}{2}}\Rightarrow g'(x)=1\frac{1}{2}\cdot(\boxed{x^2+2})^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=3x\cdot\sqrt{x^2+2}.$

D7c $h(x)=\frac{3}{(2x^3+2)^5}=3\cdot\frac{1}{(2x^3+2)^5}=3\cdot(2x^3+2)^{-5}\Rightarrow h'(x)=3\cdot -5(\boxed{2x^3+2})^{-6}\cdot 6x^2=\frac{-90x^2}{(2x^3+2)^6}.$

D8a $f'(x)=4x\cdot(x^2-4x)^5+2x^2\cdot 5(\boxed{x^2-4x})^4\cdot(2x-4)=4x\cdot(x^2-4x)^5+10x^2(x^2-4x)^4\cdot(2x-4).$

D8b $g(x)=(x^3+x)\cdot\sqrt{x^3+2}\Rightarrow g'(x)=(3x^2+1)\cdot\sqrt{x^3+2}+(x^3+x)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^3+2}}}\cdot 3x^2=(3x^2+1)\cdot\sqrt{x^3+2}+\frac{3x^2\cdot(x^3+x)}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}.$

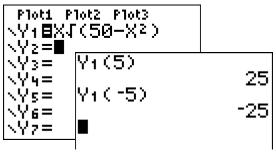
D8c $h(x)=\frac{3x^2+6x}{(2x^3+2)^5}\Rightarrow h'(x)=\frac{(2x^3+2)^5\cdot(6x+6)-(3x^2+6x)\cdot 5(\boxed{2x^3+2})^4\cdot 6x^2}{(2x^3+2)^{10}}=\frac{(2x^3+2)\cdot(6x+6)-30x^2\cdot(3x^2+6x)}{(2x^3+2)^6}$

$=\frac{12x^4+12x+12x^3+12-90x^4-180x^3}{(2x^3+2)^6}=\frac{-78x^4-168x^3+12x+12}{(2x^3+2)^6}.$

D9a $f(x)=x\cdot\sqrt{50-x^2}\Rightarrow f'(x)=1\cdot\sqrt{50-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{50-x^2}}\cdot -2x=\sqrt{50-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}}$.

Horizontale raaklijn $\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow\sqrt{50-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{50-x^2}}{1}=\frac{x^2}{\sqrt{50-x^2}}$ (kruiselings vermenigvuldigen)

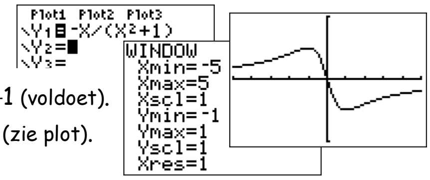
$50-x^2=x^2$
$50=2x^2$
$x^2=25$
$x=5$ of $x=-5$
$f(5)=5\cdot\sqrt{25}=25$ en $f(-5)=-5\cdot\sqrt{25}=-25$.
Horizontale raaklijnen in (5, 25) en (−5, −25).



D9b $x_A=1\Rightarrow y_A=f(1)=1\cdot\sqrt{49}=7$.
Stel k: $y=ax+b$ met $a=f'(1)=\sqrt{49}-\frac{1^2}{\sqrt{49}}=7-\frac{1}{7}=6\frac{6}{7}$.
k: $y=6\frac{6}{7}x+b$ door $A(1, 7)$ $\Rightarrow 7=6\frac{6}{7}\cdot 1+b$
$\frac{1}{7}=b$. Dus k: $y=6\frac{6}{7}x+\frac{1}{7}$.

D10a $f(x)=\frac{-x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot -1--x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-1+2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

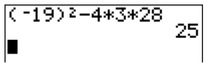
$f'(x)=0\Rightarrow$ (teller = 0 en noemer ≠ 0) $x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$ (voldoet) of $x=-1$ (voldoet).
Max. (zie plot) $f(-1)=\frac{--1}{(-1)^2+1}=\frac{1}{2}$; min. (zie plot) $f(1)=\frac{-1}{1^2+1}=-\frac{1}{2}$ en $B_f=[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}]$ (zie plot).



D10b $f'(x)=\frac{3}{25}\Rightarrow\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=\frac{3}{25}$ (kruiselings vermenigvuldigen)

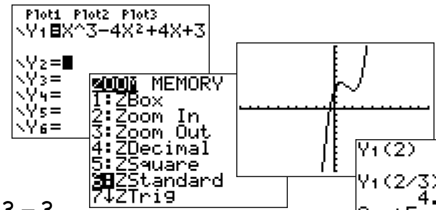
$3\cdot(x^2+1)^2=25\cdot(x^2-1)$
$3\cdot(x^4+2x^2+1)=25x^2-25$
$3x^4+6x^2+3=25x^2-25$
$3x^4-19x^2+28=0$ (stel x^2 tijdelijk t)

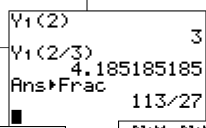
$3t^2-19t+28=0$
$D=(-19)^2-4\cdot3\cdot28=25\Rightarrow\sqrt{D}=5$
$t=x^2=\frac{19+5}{6}=\frac{24}{6}=4$ of $t=x^2=\frac{19-5}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$
$x=2$ of $x=-2$ of $x=\sqrt{\frac{7}{3}}$ of $x=-\sqrt{\frac{7}{3}}$. (voldoen)

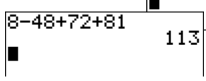


D11 $f_p(x)=-\frac{1}{3}x^3+px^2+3x-4\Rightarrow f_p'(x)=-x^2+2px+3$.
$f_p'(x)=0\Rightarrow -x^2+2px+3=0\Rightarrow 2px=x^2-3\Rightarrow p=\frac{x^2-3}{2x}$ $(x\neq 0)$.
$p=\frac{x^2-3}{2x}$ invullen in $f_p(x)$ geeft voor de kromme waarop de toppen liggen:
$y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2-3}{2x}\cdot x^2+3x-4=-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2-3}{2}\cdot x+3x-4=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x+3x-4=\frac{1}{6}x^3+1\frac{1}{2}x-4$.

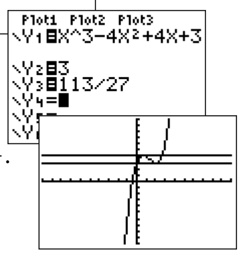
D12a $f(x)=x^3-4x^2+4x+3\Rightarrow f'(x)=3x^2-8x+4$
$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-8x+4=0$
$D=(-8)^2-4\cdot3\cdot4=64-48=16\Rightarrow\sqrt{D}=4$
$x=\frac{8+4}{6}=\frac{12}{6}=2$ of $x=\frac{8-4}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.
Minimum (zie plot) $f(2)=2^3-4\cdot2^2+4\cdot2+3=8-16+8+3=3$.
Maximum (zie plot) $f(\frac{2}{3})=(\frac{2}{3})^3-4\cdot(\frac{2}{3})^2+4\cdot\frac{2}{3}+3=\frac{8}{27}-4\cdot\frac{4}{9}+4\cdot\frac{2}{3}+3$
$=\frac{8}{27}-4\cdot\frac{12}{27}+4\cdot\frac{18}{27}+3=\frac{8}{27}-\frac{48}{27}+\frac{72}{27}+\frac{81}{27}=\frac{113}{27}$.





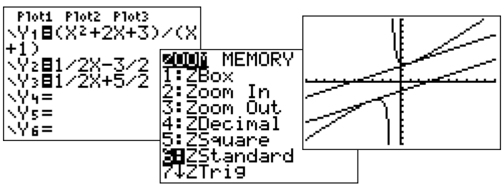


D12b $f(x)=x^3-4x^2+4x+3=p$ heeft precies één oplossing (zie plot en D12a) voor $p<3$ of $p>\frac{113}{27}$.
D12c $f(x)=x^3-4x^2+4x+3=p$ heeft precies twee oplossingen (zie plot en D12a) voor $p=3$ of $p=\frac{113}{27}$.
D12d $f(x)=x^3-4x^2+4x+3=p$ heeft precies drie oplossingen (zie plot en D12a) voor $3<p<\frac{113}{27}$.



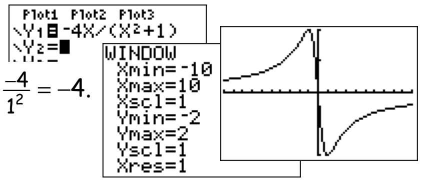
D13 De raaklijnen met rc $=\frac{1}{2}$ spelen een belangrijke rol.
$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x+1)\cdot(2x+2)-(x^2+2x+3)\cdot1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x-3}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.

$f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}$
$2\cdot(x^2+2x-1)=(x+1)^2$
$2x^2+4x-2=x^2+2x+1$
$x^2+2x-3=0$
$(x+3)\cdot(x-1)=0$
$x=-3$ (voldoet) of $x=1$ (voldoet) GA HIERNAAST VERDER ...



$f(-3)=\frac{9-6+3}{-3+1}=\frac{6}{-2}=-3$ en $f(1)=\frac{6}{2}=3$.
k_1: $y=\frac{1}{2}x+b$ door $(-3,\ -3)$ $\Rightarrow -3=\frac{1}{2}\cdot-3+b\Rightarrow -1\frac{1}{2}=b$
Dus k_1: $y=\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}$.
k_2: $y=\frac{1}{2}x+b$ door $(1, 3)$ $\Rightarrow 3=\frac{1}{2}\cdot1+b\Rightarrow 2\frac{1}{2}=b$
Dus k_2: $y=\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$.

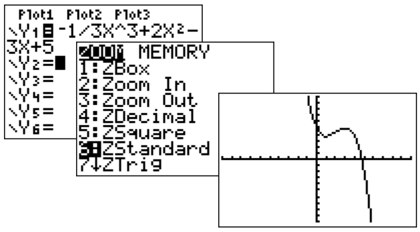
$f(x)=\frac{1}{2}x+p$ heeft minstens één oplossing (zie plot) voor $p\leq -1\frac{1}{2}$ of $p\geq 2\frac{1}{2}$.



D14 De raaklijn in de oorsprong speelt een belangrijke rol.

$f(x)=\frac{-4x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot -4 - -4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x^2-4+8x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f'(0)=\frac{-4}{1^2}=-4.$

$f(x)=\frac{-4x}{x^2+1}=ax$ heeft drie oplossingen (zie plot) voor $-4<a<0$.



D15a $f_p(x)=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+px+5 \Rightarrow f_p'(x)=-x^2+4x+p.$

$f_p'(1)=0 \Rightarrow -1^2+4\cdot 1+p=0 \Rightarrow -1+4+p=0 \Rightarrow p=-3.$

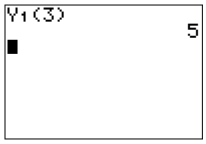
$f_{-3}'(x)=0$

$-x^2+4x-3=0$

$x^2-4x+3=0$

$(x-3)\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x=3$ (de andere oplossing) of $x=1$ (is bekend).

Het andere extreem is het maximum (zie plot) $f_{-3}(3)=-\frac{1}{3}\cdot 3^3+2\cdot 3^2-3\cdot 3+5=-9+18-9+5=5.$



D15b f_p heeft twee extremen $\Rightarrow f_p'(x)=-x^2+4x+p=0$ heeft twee oplossingen.

Dus $D=4^2-4\cdot -1\cdot p>0$

$16+4p>0$

$4p>-16$

$p>-4.$

D16 $f_p(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x}+p}{x+1} \Rightarrow f_p'(x)=\frac{(x+1)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}-(2\cdot\sqrt{x}+p)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}-2\cdot\sqrt{x}-p}{(x+1)^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{x+1-2x-p\cdot\sqrt{x}}{(x+1)^2\cdot\sqrt{x}}=\frac{-x-p\cdot\sqrt{x}+1}{(x+1)^2\cdot\sqrt{x}}.$

$y_A=f_p(4)=\frac{2\cdot\sqrt{4}+p}{4+1}=\frac{4+p}{5}$

$f_p'(4)=\text{rc}_k=-0{,}1 \Rightarrow \frac{-4-p\cdot\sqrt{4}+1}{(4+1)^2\cdot\sqrt{4}}=\frac{-3-2p}{25\cdot 2}=\frac{-3-2p}{50}=\frac{-0{,}1}{1} \Rightarrow -3-2p=-5 \Rightarrow -2p=-2 \Rightarrow p=1$

$\Rightarrow y_A=\frac{4+1}{5}=1.$

k: $y=-0{,}1x+q$ door $A(4,\,1) \Rightarrow 1=-0{,}1\cdot 4+q \Rightarrow 1{,}4=q.$

Gemengde opgaven 7. Differentiaalrekening

G27a $f(x)=(x^2+1)^4 \Rightarrow f'(x)=4(\boxed{x^2+1})^3\cdot 2x=8x\cdot(x^2+1)^3.$

G27b $g(x)=(x^2+1)^2\cdot(3x^2-5x)\Rightarrow$

$g'(x)=2(\boxed{x^2+1})^1\cdot 2x\cdot(3x^2-5x)+(x^2+1)^2\cdot(6x-5)=4x\cdot(x^2+1)\cdot(3x^2-5x)+(x^2+1)^2\cdot(6x-5).$

G27c $h(x)=\frac{2x-1}{5-2x}\Rightarrow h'(x)=\frac{(5-2x)\cdot 2-(2x-1)\cdot -2}{(5-2x)^2}=\frac{10-4x+4x-2}{(5-2x)^2}=\frac{8}{(5-2x)^2}.$

G27d $j(x)=\frac{x^2-2x}{x+1}\Rightarrow j'(x)=\frac{(x+1)\cdot(2x-2)-(x^2-2x)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2-2x+2x-2-x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}.$

G27e $k(x)=\frac{x^2+4x-7}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow$

$k'(x)=\frac{2\cdot\sqrt{x}\cdot(2x+4)-(x^2+4x-7)\cdot 2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}{(2\cdot\sqrt{x})^2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{2\cdot x\cdot(2x+4)-(x^2+4x-7)\cdot 1}{4x\cdot\sqrt{x}}=\frac{4x^2+8x-x^2-4x+7}{4x\cdot\sqrt{x}}=\frac{3x^2+4x+7}{4x\cdot\sqrt{x}}.$

G27f $l(x)=\frac{x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x^3+2}=\frac{x^2\cdot x^{\frac34}}{x^3+2}=\frac{x^{2\frac34}}{x^3+2}\Rightarrow$

$l'(x)=\frac{(x^3+2)\cdot 2\frac34\cdot x^{1\frac34}-x^{2\frac34}\cdot 3x^2}{(x^3+2)^2}=\frac{2\frac34 x^{4\frac34}+5\frac12 x^{1\frac34}-3x^{4\frac34}}{(x^3+2)^2}=\frac{-\frac14 x^{4\frac34}+5\frac12 x^{1\frac34}}{(x^3+2)^2}=\frac{-\frac14 x^4\cdot\sqrt[4]{x^3}+5\frac12 x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{(x^3+2)^2}\cdot\frac44=\frac{-x^4\cdot\sqrt[4]{x^3}+22x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{4\cdot(x^3+2)^2}.$

G28a $f(x)=x+1+\frac{1}{x+2}\Rightarrow f'(x)=1+0+\frac{(x+2)\cdot 0-1\cdot 1}{(x+2)^2}=1-\frac{1}{(x+2)^2}.$

Voor het snijpunt met de y-as ($x=0$) geldt: $rc_k=f'(0)=1-\frac{1}{2^2}=1-\frac14=\frac34$ en $y_A=f(0)=0+1+\frac12=1\frac12.$

k: $y=\frac34x+b$ door $A(0,\ 1\frac12)$ $\Rightarrow 1\frac12=\frac34\cdot 0+b\Rightarrow 1\frac12=b.$ Dus k: $y=\frac34x+1\frac12.$

G28b $f'(x)=0\Rightarrow 1-\frac{1}{(x+2)^2}=0$

$\frac11=\frac{1}{(x+2)^2}$ (kruiselings vermenigvuldigen)

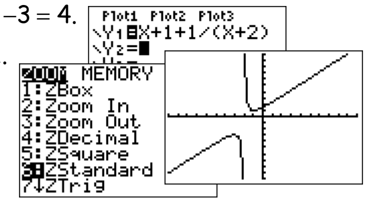
$(x+2)^2=1\Rightarrow x+2=1$ of $x+2=-1$ ↗

$x=-1$ of $x=-3$

$f(-1)=-1+1+\frac{1}{-1+2}=\frac11=1$ en $f(-3)=-3+1+\frac{1}{-3+2}=-2+\frac{1}{-1}=-3$

Dus de horizontale raaklijnen zijn $y=1$ en $y=-3$.

De afstand tussen deze lijnen is $1--3=4$.



G28c $f(x)=p$ heeft twee oplossingen (zie plot en berekening in G28b) voor $p<-3$ of $p>1$.

G28d $f'(x)=\frac{15}{16}\Rightarrow 1-\frac{1}{(x+2)^2}=\frac{15}{16}\Rightarrow\frac{1}{16}=\frac{1}{(x+2)^2}$ (kruiselings vermenigvuldigen)

$(x+2)^2=16\Rightarrow x+2=4$ of $x+2=-4\Rightarrow x=2$ of $x=-6$.

G29a $f(x)=\frac{6}{(3x+5)\cdot\sqrt{3x+5}}=\frac{6}{(3x+5)^{1\frac12}}=6(3x+5)^{-1\frac12}\Rightarrow f'(x)=6\cdot -1\frac12(\boxed{3x+5})^{-2\frac12}\cdot 3=\frac{-27}{(3x+5)^{2\frac12}}=\frac{-27}{(3x+5)^2\cdot\sqrt{3x+5}}.$

G29b $g(x)=(x^2+6)\cdot\sqrt[5]{x^2+6}=(x^2+6)^{1\frac15}\Rightarrow g'(x)=1\frac15(\boxed{x^2+6})^{\frac15}\cdot 2x=2\frac25x\cdot\sqrt[5]{x^2+6}.$

G29c $h(x)=x^4\cdot(2x^2-1)^3\Rightarrow h'(x)=4x^3\cdot(2x^2-1)^3+x^4\cdot 3(\boxed{2x^2-1})^2\cdot 4x=4x^3\cdot(2x^2-1)^3+12x^5\cdot(2x^2-1)^2.$

G29d $j(x)=(2x+6)\cdot\sqrt{x^2+6x+10}\Rightarrow$

$j'(x)=2\cdot\sqrt{x^2+6x+10}+(2x+6)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^2+6x+10}}}\cdot(2x+6)=2\cdot\sqrt{x^2+6x+10}+\frac{(2x+6)^2}{2\cdot\sqrt{x^2+6x+10}}.$

(eventueel nog) $=\frac{2\cdot(x^2+6x+10)}{\sqrt{x^2+6x+10}}+\frac{(x+3)\cdot(2x+6)}{\sqrt{x^2+6x+10}}=\frac{2x^2+12x+20+2x^2+6x+6x+18}{\sqrt{x^2+6x+10}}=\frac{4x^2+24x+38}{\sqrt{x^2+6x+10}}$

G29e $k(x)=\frac{3x}{(x^2-6x)^3}\Rightarrow k'(x)=\frac{(x^2-6x)^3\cdot 3-3x\cdot 3(\boxed{x^2-6x})^2\cdot(2x-6)}{(x^2-6x)^6}=\frac{3(x^2-6x)-9x\cdot(2x-6)}{(x^2-6x)^4}=\frac{3x^2-18x-18x^2+54x}{(x^2-6x)^4}=\frac{-15x^2+36x}{(x^2-6x)^4}.$

G29f $l(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\Rightarrow l'(x)=\frac{\sqrt{x^3+1}\cdot 1-x\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\boxed{x^3+1}}}\cdot 3x^2}{x^3+1}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{x^3+1}}{2\cdot\sqrt{x^3+1}}=\frac{2\cdot(x^3+1)-3x^3}{2\cdot(x^3+1)\cdot\sqrt{x^3+1}}=\frac{2x^3+2-3x^3}{2\cdot(x^3+1)\cdot\sqrt{x^3+1}}=\frac{-x^3+2}{2\cdot(x^3+1)\cdot\sqrt{x^3+1}}.$

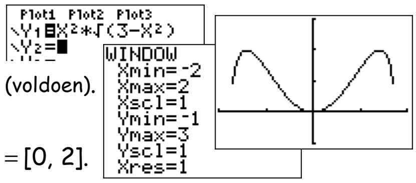
G30 $f(x)=x^2\cdot\sqrt{3-x^2} \Rightarrow f'(x)=2x\cdot\sqrt{3-x^2}+x^2\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{3-x^2}}\cdot -2x=\frac{2x\cdot(3-x^2)}{\sqrt{3-x^2}}-\frac{x^3}{\sqrt{3-x^2}}=\frac{6x-2x^3-x^3}{\sqrt{3-x^2}}=\frac{6x-3x^3}{\sqrt{3-x^2}}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{6x-3x^3}{\sqrt{3-x^2}}=0$ (teller = 0 en noemer $\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 3 \Rightarrow x\neq\pm\sqrt{3}$)

$6x-3x^3=0 \Rightarrow 3x(2-x^2)=0 \Rightarrow x=0$ of $x^2=2 \Rightarrow x=0$ of $x=\sqrt{2}$ of $x=-\sqrt{2}$ (voldoen).

$f(-\sqrt{3})=0,\ f(-\sqrt{2})=2,\ f(0)=0,\ f(\sqrt{2})=2$ en $f(\sqrt{3})=0$.

$3-x^2\geq 0 \Rightarrow -x^2\geq -3 \Rightarrow x^2\leq 3 \Rightarrow |x|\leq\sqrt{3} \Rightarrow D_f=[-\sqrt{3},\ \sqrt{3}]$ en $0\leq f(x)\leq 2 \Rightarrow B_f=[0,\ 2]$.



G31a $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x-1)\cdot(2x-2)-(x^2-2x+2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$ (teller = 0 en noemer $\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 1$)

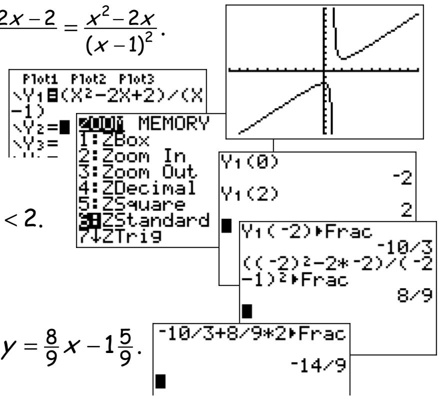
$x^2-2x=0 \Rightarrow x\cdot(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ of $x=2$.

Maximum (zie plot) $f(0)=\frac{2}{-1}=-2$ en minimum (zie plot) $f(2)=\frac{2^2-2\cdot 2+2}{2-1}=\frac{2}{1}=2$.

G31b $f(x)=p$ heeft geen oplossingen (zie de plot en de berekening in G31a) voor $-2<p<2$.

G31c $f(-2)=\frac{(-2)^2-2\cdot -2+2}{-2-1}=\frac{10}{-3} \Rightarrow A(-2,\ -3\frac{1}{3})$ en $rc_k=f'(-2)=\frac{(-2)^2-2\cdot -2}{(-3)^2}=\frac{8}{9}$.

k: $y=\frac{8}{9}x+b$
door $A(-2,\ -3\frac{1}{3})$ $\Rightarrow -3\frac{1}{3}=\frac{8}{9}\cdot -2+b \Rightarrow -\frac{10}{3}+\frac{16}{9}=-\frac{30}{9}+\frac{16}{9}=-\frac{14}{9}=b$. Dus k: $y=\frac{8}{9}x-1\frac{5}{9}$.



G31d $\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-3x+p$

$x^2-2x+2=(x-1)\cdot(-3x+p)$

$x^2-2x+2=-3x^2+px+3x-p$

$4x^2-5x-px+2+p=0$

$4x^2+(-5-p)x+2+p=0$ (twee oplossingen als $D>0$)

$D=(-5-p)^2-4\cdot 4\cdot(2+p)$

$D=25+10p+p^2-32-16p=p^2-6p-7=0$

$(p-7)(p+1)=0 \Rightarrow p=7$ of $p=-1$

$D>0 \Rightarrow p^2-6p-7$ ☺ $>0 \Rightarrow p<-1$ of $p>7$.

of De raaklijnen met rc = −3 spelen een belangrijke rol.

$f'(x)=-3 \Rightarrow \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{-3}{1}$

$x^2-2x=-3\cdot(x-1)^2$

$x^2-2x=-3\cdot(x^2-2x+1)$

$x^2-2x=-3x^2+6x-3$

$4x^2-8x+3=0$

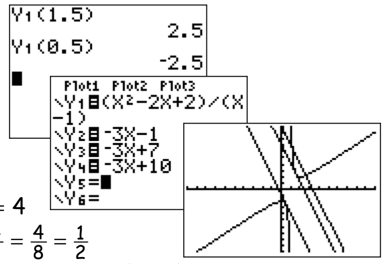
$D=(-8)^2-4\cdot 4\cdot 3=16 \Rightarrow \sqrt{D}=4$

$x=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=1\frac{1}{2}$ of $x=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$f(1\frac{1}{2})=2\frac{1}{2} \Rightarrow y=-3x+p$ is raaklijn in $(1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}) \Rightarrow p=7$

$f(\frac{1}{2})=-2\frac{1}{2} \Rightarrow y=-3x+p$ is raaklijn in $(\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2}) \Rightarrow p=-1$

$f(x)=-3x+p$ heeft 2 oplossingen (zie plot) voor $p<-1$ of $p>7$.



G32a $rc_{OP}=\frac{y_P}{x_P}=\frac{\frac{\sqrt{p}}{1-p}}{p}=\frac{\frac{\sqrt{p}}{1-p}}{p}\cdot\frac{1-p}{1-p}=\frac{\sqrt{p}}{p\cdot(1-p)}=\frac{\sqrt{p}}{p-p^2}$.

$g(p)=\frac{\sqrt{p}}{p-p^2} \Rightarrow g'(p)=\frac{(p-p^2)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{p}}-\sqrt{p}\cdot(1-2p)}{(p-p^2)^2}=\frac{(p-p^2)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{p}}-\sqrt{p}\cdot(1-2p)}{(p-p^2)^2}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{p}}{2\cdot\sqrt{p}}=\frac{p-p^2-2\cdot p\cdot(1-2p)}{2\cdot\sqrt{p}\cdot(p-p^2)^2}$.

Extreem: $g'(p)=0 \Rightarrow$ (teller = 0 en noemer $\neq 0$) $p-p^2-2p+4p^2=0 \Rightarrow 3p^2-p=0 \Rightarrow p\cdot(3p-1)=0 \Rightarrow$

$p=0$ (voldoet niet, want de noemer van g' is dan nul en $P=O$) of $p=\frac{1}{3}$ (voldoet). Dus rc_{OP} is minimaal voor $p=\frac{1}{3}$.

G32b $f(x)=ax$ heeft drie oplossingen voor $p>\frac{1}{3}$. (de lijn $y=ax$ gaat door O en snijdt dan de grafiek nog eens in twee punten)

$f(x)=ax$ heeft twee oplossingen voor $p=\frac{1}{3}$. (de lijn $y=ax$ en de grafiek hebben de oorsprong en het raakpunt gemeen)

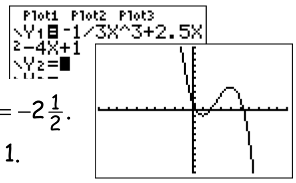
$f(x)=ax$ heeft één oplossing voor $p<\frac{1}{3}$. (de lijn $y=ax$ en de grafiek hebben alleen de oorsprong gemeen)

G33a $f_p(x)=-\frac{1}{3}x^3-px^2-4x+1 \Rightarrow f_p'(x)=-\frac{1}{3}\cdot 3x^2-p\cdot 2x-4=-x^2-2px-4$.

Exteeem voor $x=4 \Rightarrow f_p'(4)=0 \Rightarrow -4^2-2p\cdot 4-4=0 \Rightarrow -16-8p-4=0 \Rightarrow -8p=20 \Rightarrow p=\frac{20}{-8}=-2\frac{1}{2}$.

$f'_{-2\frac{1}{2}}(x)=0 \Rightarrow -x^2+5x-4=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x-1)=0 \Rightarrow x=4$ (bekend) of $x=1$.

Het andere extreem (minimum volgens een plot) is $f_{-2\frac{1}{2}}(1)=-\frac{1}{3}\cdot 1^3+2\frac{1}{2}\cdot 1^2-4\cdot 1+1=-\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}-4+1=2\frac{1}{6}-3=-\frac{5}{6}$.



G33b $f_p'(x)=-x^2-2px-4=0$ heeft twee oplossingen als $D>0$.

$D=(-2p)^2-4\cdot -1\cdot -4=4p^2-16=0 \Rightarrow 4p^2=16 \Rightarrow p^2=4 \Rightarrow p=\pm 2$; $D>0 \Rightarrow 4p^2-16$ ☺ $>0 \Rightarrow p<-2$ of $p>2$.

G33c $f_p'(x)=0 \Rightarrow -x^2-2px-4=0 \Rightarrow -2px=x^2+4 \Rightarrow p=-\frac{x^2+4}{2x}$ (voor $x\neq 0$).

$p=-\frac{x^2+4}{2x}$ invullen in $f_p(x)=-\frac{1}{3}x^3-px^2-4x+1$ geeft voor de kromme waarop de toppen liggen:

$y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2+4}{2x}\cdot x^2-4x+1=-\frac{1}{3}x^3+\frac{x^2+4}{2}\cdot x-4x+1=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^3+2x-4x+1=\frac{1}{6}x^3-2x+1$.

G34a $f_p(x) = x \cdot \sqrt{x} - p \cdot \sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} - p \cdot \sqrt{x}$ $(x \geq 0) \Rightarrow f_p'(x) = 1\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} - p \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{p}{2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{3x - p}{2 \cdot \sqrt{x}}$.

$f_p'(16) = 5 \Rightarrow \frac{3 \cdot 16 - p}{2 \cdot \sqrt{16}} = 5 \Rightarrow \frac{48 - p}{8} = 5 \Rightarrow 48 - p = 40 \Rightarrow -p = -8 \Rightarrow p = 8$.

$f_8(16) = 16 \cdot \sqrt{16} - 8 \cdot \sqrt{16} = 16 \cdot 4 - 8 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32 \Rightarrow A(16,\ 32)$.

$y = 5x + q$ door $A(16,\ 32) \Rightarrow 32 = 5 \cdot 16 + q \Rightarrow q = 32 - 80 = -48$.

G34b $f_p'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x - p}{2 \cdot \sqrt{x}} = 0 \Rightarrow$ (teller = 0 en noemer ≠ 0) $3x - p = 0 \Rightarrow 3x = p$ $(x \neq 0)$.

$p = 3x$ invullen in $f_p(x) = x \cdot \sqrt{x} - p \cdot \sqrt{x}$ geeft voor de kromme met toppen: $y = x \cdot \sqrt{x} - 3x \cdot \sqrt{x} = -2x \cdot \sqrt{x}$.

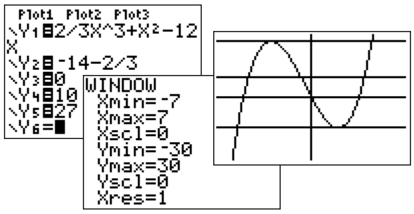
G34c $f_p'(x) = 0 \Rightarrow 3x = p$ $(x \neq 0) \Rightarrow x_{\text{top}} = \frac{1}{3} p$.

$x_{\text{top}} = \frac{1}{3} p \Rightarrow y_{\text{top}} = f_p(x_{\text{top}}) = f_p(\frac{1}{3} p) = \frac{1}{3} p \cdot \sqrt{\frac{1}{3} p} - p \cdot \sqrt{\frac{1}{3} p} = -\frac{2}{3} p \cdot \sqrt{\frac{1}{3} p}$.

$y_{\text{top}} = -2 \Rightarrow -\frac{2}{3} p \cdot \sqrt{\frac{1}{3} p} = -2$ (kwadrateren) $\Rightarrow \frac{4}{9} p^2 \cdot \frac{1}{3} p = 4 \Rightarrow \frac{4}{27} p^3 = 4 \Rightarrow \frac{1}{27} p^3 = 1 \Rightarrow p^3 = 27 \Rightarrow p = 3$ (voldoet).

G35a $f(x) = \frac{2}{3} x^3 + x^2 - 12x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 2x - 12 = 2x^2 + 2x - 12$.

$f'(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x = -3$ of $x = 2$.



Maximum (zie plot) $f(-3) = \frac{2}{3} \cdot (-3)^3 + (-3)^2 - 12 \cdot -3 = -18 + 9 + 36 = -9 + 36 = 27$.

Minimum (zie plot) $f(2) = \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2^2 - 12 \cdot 2 = \frac{16}{3} + 4 - 24 = 5\frac{1}{3} - 20 = -14\frac{2}{3}$.

$f(x) = p$ heeft precies drie oplossingen (zie plot) voor $-14\frac{2}{3} < p < 27$.

G35b $\frac{2}{3} x^3 + x^2 - 12x = ax \Rightarrow \frac{2}{3} x^3 + x^2 - 12x - ax = 0 \Rightarrow x \cdot (\frac{2}{3} x^2 + x - 12 - a) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $\frac{2}{3} x^2 + x - 12 - a = 0$.

$f(x) = ax$ heeft drie oplossingen als $\frac{2}{3} x^2 + x - 12 - a = 0$ twee oplossingen (andere dan $x = 0$) heeft $\Rightarrow a \neq -12$.

$D = 1^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-12 - a) = 1 + 32 + \frac{8}{3} a$. Dus $D > 0 \Rightarrow 33 + \frac{8}{3} a > 0 \Rightarrow \frac{8}{3} a > -33 \Rightarrow a > -33 \cdot \frac{3}{8} = -\frac{99}{8}$.

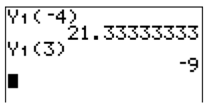
Dus $f(x) = ax$ heeft precies drie oplossingen als $a > -\frac{99}{8}$ en $a \neq -12$.

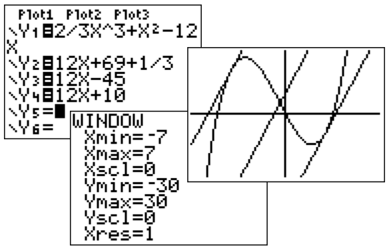
G35c De raaklijnen met rc = 12 spelen een belangrijke rol.

$f'(x) = 2x^2 + 2x - 12 = 12 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4) \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x = -4$ of $x = 3$.

$f(-4) = \frac{2}{3} \cdot (-4)^3 + (-4)^2 - 12 \cdot -4 = \frac{2}{3} \cdot -64 + 16 + 48 = \frac{2}{3} \cdot -64 + 64 = \frac{1}{3} \cdot 64 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$

$y = 12x + q$ door $(-4,\ 21\frac{1}{3}) \Rightarrow 21\frac{1}{3} = 12 \cdot -4 + q \Rightarrow 69\frac{1}{3} = q$.





$f(3) = \frac{2}{3} \cdot 3^3 + 3^2 - 12 \cdot 3 = \frac{2}{3} \cdot 27 + 9 - 36 = 18 - 27 = -9$

$y = 12x + q$ door $(3,\ -9) \Rightarrow -9 = 12 \cdot 3 + q \Rightarrow -45 = q$.

$f(x) = -3x + p$ heeft drie oplossingen (zie plot) voor $-45 < q < 69\frac{1}{3}$.

G36a $y_A = \sqrt{2x - 4} = 12$ (kwadrateren) $\Rightarrow 2x - 4 = 144 \Rightarrow 2x = 148 \Rightarrow x = 74$ (voldoet) $\Rightarrow A(74,\ 12)$.

$f(x) = \sqrt{2x - 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x - 4}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x - 4}} \Rightarrow \text{rc}_l = f'(74) = \frac{1}{\sqrt{148 - 4}} = \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}$.

G36b $p = 2$ geeft $f_2(x) = \sqrt{2x - 4 \cdot 2 + 4} = \sqrt{2x - 4}$ en $p = 0$ geeft $f_0(x) = \sqrt{4} = 2 = y_G$.

$f_2(x) = f_0(x) \Rightarrow \sqrt{2x - 4} = 2$ (kwadrateren) $\Rightarrow 2x - 4 = 4 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 = x_G$.

$f_p(4) = \sqrt{p \cdot 4 - 4 \cdot p + 4} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow G(4,\ 2)$ ligt voor elke waarde van p op de grafiek van f_p.

G37a $f(x) = -x^3 + 27x + 44 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 27$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ of $x = -3$ (beide toppen liggen dus 3 van de y-as).

G37b Op de y-as is $x = 0 \Rightarrow y_Q = f(0) = 44 \Rightarrow Q(0,\ 44)$.

De horizontale lijn door $Q(0,\ 44)$ is $y = 44$.

$f(x) = 44 \Rightarrow -x^3 + 27x + 44 = 44 \Rightarrow -x^3 + 27x = 0 \Rightarrow -x \cdot (x^2 - 27) = 0 \Rightarrow x = 0$ of $x^2 = 27 \Rightarrow x = 0$ of $x = \pm\sqrt{27}$.

Dus $x_P = -\sqrt{27} = -3 \cdot \sqrt{3}$, $x_Q = 0$ en $x_R = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow PR = x_R - x_P = 3 \cdot \sqrt{3} - -3 \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot \sqrt{3}$.

G37c
$$\left.\begin{array}{l} h(x) = (x + 4) \cdot (p + 4x - x^2) = px + 4x^2 - x^3 + 4p + 16x - 4x^2 = -x^3 + px + 16x + 4p \\ h(x) = f(x) = -x^3 + 27x + 44 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p + 16 = 27 \text{ én} \\ 4p = 44 \end{array}\right\} \Rightarrow p = 11.$$

G37d $h(x) - x^3 + px + 16x + 4p \Rightarrow h'(x) = -3x^2 + p + 16.$

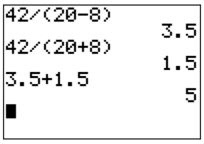
In een top geldt $h'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + p + 16 = 0 \Rightarrow -3x^2 = -p - 16 \Rightarrow x^2 = \frac{-p-16}{-3} = -\frac{-p-16}{3} = \frac{p+16}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{p+16}{3}}.$

Omdat nu geldt dat $-\sqrt{\frac{p+16}{3}} < \sqrt{\frac{p+16}{3}}$ is $x_A = -\sqrt{\frac{p+16}{3}}$ en is $x_B = \sqrt{\frac{p+16}{3}}$.

G38a $v_{\text{van } P \text{ naar } Q} = 20 - 8 = 12$ (km/uur) $\Rightarrow t_{\text{van } P \text{ naar } Q} = \frac{42}{12} = 3\frac{1}{2}$ (uur).

$v_{\text{van } Q \text{ naar } P} = 20 + 8 = 28$ (km/uur) $\Rightarrow t_{\text{van } Q \text{ naar } P} = \frac{42}{28} = 1\frac{1}{2}$ (uur).

De hele tocht van P via Q terug naar P duurt $3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 5$ uur.



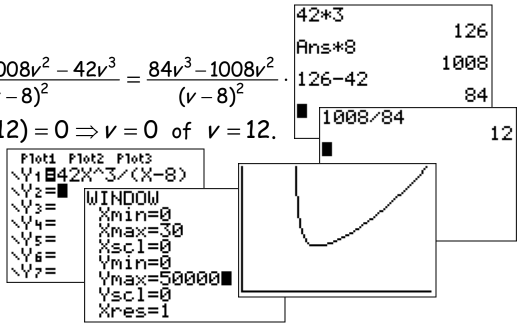
G38b $v_{\text{stroomopwaarts}} = v - 8$ (km/uur) $\Rightarrow T = \frac{\text{afstand van } P \text{ naar } Q}{v_{\text{stroomopwaarts}}} = \frac{42}{v-8}$ (uur).

$B = T \cdot v^3$ (gegeven) $= \frac{42}{v-8} \cdot v^3 = \frac{42v^3}{v-8}.$

G38c $B = \frac{42v^3}{v-8} \Rightarrow B'(v) = \frac{dB}{dv} = \frac{(v-8) \cdot 42 \cdot 3v^2 - 42v^3 \cdot 1}{(v-8)^2} = \frac{(v-8) \cdot 126v^2 - 42v^3}{(v-8)^2} = \frac{126v^3 - 1008v^2 - 42v^3}{(v-8)^2} = \frac{84v^3 - 1008v^2}{(v-8)^2}.$

Extreem als $\frac{dB}{dv} = 0$ (teller = 0 en de noemer $\neq 0$) $\Rightarrow 84v^3 - 1008v^2 = 84v^2(v-12) = 0 \Rightarrow v = 0$ of $v = 12.$

Het minimum (zie plot) ligt bij $v = 12.$ (voor $v < 8$ ga je stroomafwaarts)



G39a $y = rx - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = r - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot 2x.$

$rc_l = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \left(r - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot 2x\right)_{x=0} = r - 0 = r.$

G39b $y = 0 \Rightarrow rx - (0{,}1 + 0{,}1r^2)x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot (r - (0{,}1 + 0{,}1r^2)x) = 0$

$(x_O = 0$ of$)$ $r - (0{,}1 + 0{,}1r^2)x = 0 \Rightarrow -(0{,}1 + 0{,}1r^2)x = -r \Rightarrow x_D = OD = \frac{r}{0{,}1 + 0{,}1r^2} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10r}{1 + r^2}.$

G39c $OD = f(r) = \frac{10r}{1+r^2} \Rightarrow f'(r) = \frac{(1+r^2) \cdot 10 - 10r \cdot 2r}{(1+r^2)^2} = \frac{10 + 10r^2 - 20r^2}{(1+r^2)^2} = \frac{10 - 10r^2}{(1+r^2)^2}.$

$f'(r) = 0 \Rightarrow \frac{10 - 10r^2}{(1+r^2)^2} = 0$ (teller = 0 en de noemer $\neq 0$)

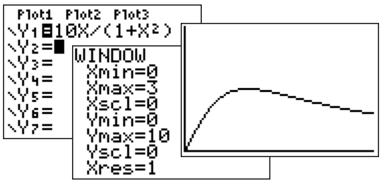
$10 - 10r^2 = 0$

$10 = 10r^2$

$r^2 = 1$

$r = 1$ (want $r > 0$).

Dus OD is maximaal (zie plot, maar dit volgt ook uit de vraagstelling) voor $r = 1.$



G39d $y = rx - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot x^2$ snijden met $y = x$ geeft

$rx - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot x^2 = x \Rightarrow rx - x - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot (r - 1 - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot x) = 0$

$(x_O = 0$ of$)$ $r - 1 - (0{,}1 + 0{,}1r^2) \cdot x = 0 \Rightarrow r - 1 = (0{,}1 + 0{,}1r^2)x \Rightarrow x_C = \frac{r-1}{0{,}1 + 0{,}1r^2} \cdot \frac{10}{10} = \frac{10 \cdot (r-1)}{1+r^2}.$

G39e C op $y = x \Rightarrow x_C = y_C = \frac{10 \cdot (r-1)}{1+r^2}.$

$OC = \sqrt{x_C{}^2 + y_C{}^2} = \sqrt{x_C{}^2 + x_C{}^2} = \sqrt{2 \cdot x_C{}^2} = x_C \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{10 \cdot (r-1)}{1+r^2}.$

$g(r) = \sqrt{2} \cdot \frac{10 \cdot (r-1)}{1+r^2} \Rightarrow g'(r) = \sqrt{2} \cdot \frac{(1+r^2) \cdot 10 \cdot 1 - 10 \cdot (r-1) \cdot 2r}{(1+r^2)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{10 + 10r^2 - 20r^2 + 20r}{(1+r^2)^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{-10r^2 + 20r + 10}{(1+r^2)^2}.$

$g'(r) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{-10r^2 + 20r + 10}{(1+r^2)^2} = 0$ (teller = 0 en de noemer $\neq 0$)

$-10r^2 + 20r + 10 = 0$

$r^2 - 2r - 1 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$r = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$ (voldoet niet want $r > 0$) of $r = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ (voldoet).

OC heeft maximum (zie plot, maar dit volgt ook uit de vraagstelling)

$g(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot \frac{10 \cdot (1 + \sqrt{2} - 1)}{1 + (1+\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} \cdot \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{1 + 1 + 2\sqrt{2} + 2} = \frac{20}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{10}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{20 - 10\sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{20 - 10\sqrt{2}}{2} = 10 - 5\sqrt{2}.$